Funktionentheorie II

Sommersemester 2011

Christoph Schweigert

Universität Hamburg
Department Mathematik
Bereich Algebra und Zahlentheorie

(Stand: 04.02.2012)

Inhaltsverzeichnis

Literatur:

Literatur, die ich bei der Vorbereitung häufig herangezogen habe:

- Eberhard Freitag, Rolf Busam: Funktionentheorie, Springer, 2006
Englisch: Complex analysis, Springer Universitext. 2009.
- M. Koecher, A. Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer 2007
- S. Lang: Elliptic functions, Addison-Wesley 1973.
- S. Lang: Introduction to modular forms, Springer Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 222, Springer 1976
- J.P. Serre: A course in Arithmetic. Springer Graduate Text in Mathematics 7, 1973, see Chapter 7

Im zweiten Teil habe ich mich gestützt auf

- Otto Forster, Riemannsche Flächen, Springer, Heidelberger Taschenbücher 184, 1977. Englisch: Lectures on Riemann surfaces, Springer Graduate Texts in Mathematics, 1991

Illustrationen sind der Wikipedia entnommen.

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ss10/f2skript.pdf`
als pdf-Datei.

Bitte schicken Sie Korrekturen und Bemerkungen an `christoph.schweigert@uni-hamburg.de`!

Herrn Dr. Florin Dumitrescu danke ich für die Mitarbeit und Hinweise zum Skript. Bei den Hamburger Studenten, besonders bei N. Matthes und J. Sommerfeld, möchte ich mich für zahlreiche Hinweise bedanken.

1 Wiederholung

1.1 Holomorphe und analytische Funktionen

Definition 1.1.1
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, d.h. eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

1. *Eine Funktion heißt im Punkt $z_0 \in U$ holomorph, wenn sie in einer Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist.*

2. *Eine holomorphe Funktion auf einem Bereich U ist eine auf ganz U komplex differenzierbare Funktion f.*

3. *Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen zwei Bereichen $U, V \subset \mathbb{C}$ heißt biholomorph, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrfunktion f^{-1} holomorphe Funktionen sind.*

Es gelten die üblichen Regeln:
- Linearkombinationen komplex differenzierbarer Funktionen sind wieder komplex differenzierbar; Differentiation ist eine lineare Abbildung.
- die Produktregel. Differentiation ist eine Derivation.

Aus diesen Sätzen folgt sofort:

Satz 1.1.2.

1. *Polynomiale Funktionen in z, $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, mit $a_n \in \mathbb{C}$, sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Die Ableitung ist*
$$p'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} \ .$$

2. *Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph. Die Ableitung einer rationalen Funktion ist eine rationale Funktion.*

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen beschreiben die Beziehung zwischen der komplexen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und der reellen Differenzierbarkeit der zugehörigen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

Satz 1.1.3.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. Man schreibe $f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit $z = x + \mathrm{i}y$, und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit reellwertigen Funktionen $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

2. *f ist in (x_0, y_0) reell-differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

3. *Es gilt die Identität:*

$$f'(z_0) = A = \alpha + \mathrm{i}\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ .$$

Eine zweite wichtige Klasse von Funktionen sind analytische Funktionen, die über Potenzreihen definiert werden. Sei E ein komplexer Banachraum.

Definition 1.1.4
Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n \in E$ heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten a_n um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert, heißt der Konvergenzbereich der Reihe.

Aus dem Majorantenkriterium leitet man das Abelsche Lemma her, das es erlaubt, das Konverenzverhalten von Potenzreihen zu kontrollieren:

Satz 1.1.5.
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ auf $\mathbb{C}$ mit Werten in einem Banachraum E existiert genau ein $r \in [0, \infty]$, der Konvergenzradius der Potenzreihe, mit den folgenden Eigenschaften:

1. *In jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $|z - z_0| \leq \rho < r$ ist die Reihe gleichmäßig absolut konvergent.*

2. *Für $|z - z_0| > r$ ist die Reihe divergent.*

3. *Es gilt die Formel von Cauchy-Hadamard*

$$r = \left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Eine wichtige Eigenschaft von Potenzreihen ist:

Satz 1.1.6 (Isoliertheit der Nullstellen)**.**
Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ auf $\mathbb{C}$ mit Werten in einem Banachraum E habe Konvergenzradius $r > 0$. Falls nicht alle Koeffizienten a_n gleich Null sind, existiert ein $r' < r$, so dass für alle z mit $0 < |z - z_0| < r'$ der Wert $f(z)$ von Null verschieden ist.

Daraus folgt die folgende Eindeutigkeitsaussage:

Korollar 1.1.7.
Sind zwei Potenzreihen f, g auf der gleichen Kreisschreibe mit dem Mittelpunkt z_0 als Entwicklungspunkt absolut summierbar und stimmen ihre Werte dort überein, so stimmen alle ihre Koeffizienten überein.

Beweis.
Betrachte $f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n$ und wende Das Prinzip der Isoliertheit von Nullstellen, Satz 1.1.6 an. □

Wir wollen nun den Begriff der Potenzreihe benutzen, um eine weitere wichtige Funktionenklasse einzuführen.

Definition 1.1.8

1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir nennen eine Abbildung $f : U \to E$ in einen Banachraum E analytisch, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine offene Kreisschreibe $D_\epsilon(z_0) \subset U$ existiert, so dass auf $D_\epsilon(z_0)$ der Wert von f gleich einer absolut summierbaren Potenzreihe in der Variablen $z - z_0$ ist.*

   Auf Grund von Korollar 1.1.7 ist diese Potenzreihe eindeutig bestimmt.

2. *Eine Funktion f heißt ganz, wenn sie gleich einer Potenzreihe ist, die auf ganz $\mathbb{C}$ absolut summierbar ist.*

Bemerkungen 1.1.9.

1. *Linearkombinationen analytischer Funktionen sind wieder analytisch.*

2. *Polynomiale Funtionen sind ganze Funktionen.*

3. *Setzt man analytische Funktionen in analytische Funktionen ein, so erhält man eine analytische Funktion.*

4. *Deswegen liefern absolut summierbare Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius analytische Funktionen.*

5. *Die k-te Ableitung einer analytischen Funktion lässt sich wieder als analytische Funktion schreiben. Die lokale Potenzreihe ist hierbei*

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(z - z_0) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+1}(z - z_0)^2 + \ldots \ .$$

   Setzt man speziell $z = z_0$, so folgt $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$, d.h. für alle k

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \ .$$

   Daraus folgt eine "Taylorformel für Potenzreihen":

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \ .$$

6. *Jede auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion ist auf U unendlich oft differenzierbar mit analytischen Ableitungen. Insbesondere sind analytische Funktionen holomorph.*

7. *Es sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf der Kreisscheibe $D_r(0)$ absolut konvergent und definiere eine analytische Funktion $f : D_r(0) \to E$. Dann ist auch die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$$

   auf $D_r(0)$ absolut konvergent und liefert eine Stammfunktion für f.

Ist $U \subset K$ offen und *zusammenhängend*, so heißt eine Menge $M \subset U$ eine Eindeutigkeitsmenge, wenn je zwei auf U definierte und analytische Funktionen, die auf M übereinstimmen, auch auf ganz U übereinstimmen. Es gibt folgende Beispiele von Eindeutigkeitsmengen:

1. Nichtleere offene Teilmengen der zusammenhängenden Menge U. (Dies gilt über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$ und auch in beliebiger endlicher Dimension.)

2. Nichtleere Durchschnitte der Form $\tilde{U} \cap (b + \mathbb{R})$ mit $\tilde{U} \subset U$ offen.

3. Kompakte unendliche Teilmengen von U.

Wir erinnern an:

Satz 1.1.10 (Prinzip vom Maximum).
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine komplexe *Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Wenn es ein $r' < r$ gibt, so dass*

$$|f(z)| \leq |f(0)|$$

für alle $|z| < r'$, dann ist f konstant.

Dieser Satz gilt für reell-analytische Potenzreihen nicht, wie das Gegenbeispiel

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

für $|z| < 1$ zeigt.

Korollar 1.1.11 (Randwertprinzip).
Es sei f eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ definierte komplexwertige analytische Funktion, die auf keiner Zusammenhangskomponente von U konstant ist. Dann sind für jede kompakte Teilmenge $H \subset U$ die Punkte $z \in H$, in denen $|f(z)| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ angenommen wird, Randpunkte von H.

Beweis.
Das Supremum existiert wegen der Kompaktheit von H und der Stetigkeit von f. Angenommen, das Supremum wird in einem Punkt z_0 im Innern angenommen. Finde dann eine Kreisscheibe $U_\epsilon(z_0)$, auf der $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in U_\epsilon(z_0)$ gilt. Nach dem Prinzip vom Maximum aus Satz 1.1.10 ist dann f auf $U_\epsilon(z_0)$ konstant. Dies ist eine Eindeutigkeitsmenge für die betreffende Zusammenhangskomponente von H; daher ist f auf dieser Zusammenhangskomponente konstant. □

1.2 Integralsätze

Definition 1.2.1
Sei seien γ_0, γ_1 zwei auf demselben kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Kurven und U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, die sowohl $\gamma_0(I)$ als auch $\gamma_1(I)$ umfasst.

1. *Eine freie Homotopie* [1] *von γ_0 in γ_1 innerhalb von U ist eine stetige Abbildung*

$$\varphi : I \times [\alpha, \beta] \to U$$

mit $\alpha < \beta$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ und $\varphi(t, \beta) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

[1] Bei einer Homotopie im engeren Sinne wird zusätzlich gefordert, dass sie Anfangs- und Endpunkte festlässt.

2. *Eine Kurve γ_0 heißt* homotop *zu einer Kurve γ_1 in U, wenn es eine Homotopie von γ_0 in γ_1 in U gibt.*

Zentraler Satz der Funktionentheorie ist:

Theorem 1.2.2 (Cauchyscher Integralsatz)**.**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f eine analytische Abbildung von U in einen komplexen Banachraum E. Sind Γ_1, Γ_2 zwei geschlossene Wege in U, die innerhalb U homotop sind, so gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$

Damit ist der Wert eines komplexen Wegintegrals als Invariante der Homotopieklasse des Weges identifiziert. Man kann Sie tatsächlich sogar als Invariante der Homologie auffassen, vgl. hierzu Kapitel IV.B des Buchs von Freitag-Busam.

Definition 1.2.3
Ein einfach zusammenhängendes Gebiet *$U \subset \mathbb{C}$ ist eine zusammenhängende offene Menge mit der Eigenschaft, dass jede geschlossene Kurve in U innerhalb von U homotop zu einer geschlossenen Kurve ist, die sich auf einen Punkt reduziert.*

Theorem 1.2.4.
Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so hat jede auf U analytische Funktion f eine auf dem ganzen Gebiet U definierte analytische Stammfunktion.

Definition 1.2.5
Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$. Die ganze Zahl

$$j(a;\gamma) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{d}z/(z-a) \in \mathbb{Z}$$

heißt der Index *des Punktes a in Bezug auf den geschlossenen Weg γ oder auch der* Index *des Weges γ in Bezug auf den Punkt a.*

Bemerkungen 1.2.6.

1. *Aus dem Cauchyschen Integralsatz 1.2.2 folgt sofort, dass zwei geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, die in dieser Menge homotop sind, den gleichen Index in Bezug auf a haben.*

2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein* einfach zusammenhängendes *Gebiet und $\gamma : I \to U$ ein geschlossener Weg in U. Dann gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{C} \setminus U$ die Beziehung $j(x;\gamma) = 0$. (Hierzu ziehe man den geschlossenen Weg γ zu einem Weg zusammen, der sich auf einen Punkt reduziert.)*

3. *Der Index $j(a;\gamma)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplements $A := \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ der kompakten Menge $\gamma(I)$ konstant. Die Menge der Punkte, für welche $j(x;\gamma) \neq 0$ ist, in $\mathbb{C}$ relativ kompakt.*

Wir erinnern nun an einem weiteren zentralen Satz der Funktionentheorie:

Theorem 1.2.7 (Cauchysche Integralformel).
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und E ein komplexer Banachraum. Sei ferner $f : U \to E$ eine analytische *Abbildung. Dann gilt für jeden auf einem kompakten Intervall I definierten geschlossenen Weg γ in U und jedes $x \in U \setminus \gamma(I)$ die Beziehung*

$$j(x;\gamma)f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-x} \ .$$

Allgemeiner findet man für die k-te Ableitung die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$j(z;\gamma)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-z)^{k+1}} \ .$$

Eine analytische Funktion ist also insbesondere auf einer Kreisscheibe durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe festgelegt. Umgekehrt können wir über Wegintegrale analytische Funktionen konstruieren:

Theorem 1.2.8.
Sei $\gamma : I = [b, c] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und g eine stetige Abbildung von $\gamma(I)$ in einen komplexen Banachraum E. Dann ist die Funktion

$$f(z) := \int_\gamma \frac{g(x)\mathrm{d}x}{x-z}$$

auf dem Komplement von $\gamma(I)$ definiert und analytisch.

Genauer gesagt: setzen wir für jeden Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$

$$c_k := \int_\gamma \frac{g(x)\mathrm{d}x}{(x-a)^{k+1}} \ .$$

Dann ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$ konvergent auf jeder offenen Kreisscheibe $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ und ihre Summe ist gleich $f(z)$.

Als Folge erhält man

Korollar 1.2.9 (Cauchysche Ungleichungen).
Sei E ein komplexer Banachraum, $U_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe und $f : U_r(z_0) \to E$ eine analytische Funktion. Ferner gebe es eine Schranke $M > 0$ mit $|f(z)| \le M$ für alle $z \in U_r(z_0)$. Dann können wir auch alle Ableitungen von f beschränken:

$$|f^{(n)}(z_0)| \le M\frac{n!}{r^n} \ .$$

1.3 Direkte Folgerungen aus den Cauchyschen Integralformeln

Wir können nun eine wichtige Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz Theorem 1.2.8 ziehen:

Theorem 1.3.1.

1. *Jede holomorphe Abbildung f von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ in einen komplexen Banachraum E ist analytisch.*

2. *Sei $z_0 \in U$ und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Potenzreihenentwicklung um z_0. Dann konvergiert diese Entwicklung mindestens auf jeder Kreisscheibe $D_R(z_0)$, die in U liegt, lokal gleichmäßig gegen f.

Aus der Cauchyschen Ungleichung 1.2.9 folgt

Korollar 1.3.2 (Satz von Liouville).
Sei $f : \mathbb{C} \to E$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ *definierte holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen Banachraum E. Es existiere eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ und eine Konstante $a \geq 0$, so dass*

$$|f(z)| \leq a(1 + |z|)^N$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann ist f eine polynomiale Funktion höchstens N-ten Grades.

Mit $N = 0$ folgt insbesondere, dass jede beschränkte ganze Funktion notwendigerweise konstant ist.

Beweis.
Schreibe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. Aus der Cauchyschen Ungleichung 1.2.9, angewandt auf die Kreisscheibe $D_r(0)$, folgt

$$|c_n| \leq a \frac{(r+1)^N}{r^n} \quad .$$

Da r bei einer ganzen Funktion beliebig groß gewählt werden kann, folgt $c_n = 0$ außer für $n \leq N$. □

Mit Hilfe dieser Sätze erhält man auch Aussagen über Räume von Abbildungen:

1.4 Singularitäten und Residuen

Hatten wir vorher einfach zusammenhängende Gebiete, insbesondere Kreisscheiben betrachtet, so führen wir nun ähnliche Betrachtungen auf ringförmigen Gebieten durch.

Satz 1.4.1.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und a ein isolierter Punkt von $\mathbb{C} \setminus U$, d.h. es gibt eine Umgebung V in $\mathbb{C}$ von a, so dass $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ gilt. Ferner sei $r > 0$ so gewählt, dass alle Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe mit $|z - a| \leq r$ mit Ausnahme von a in U liegen.

Sei E ein komplexer Banachraum und $f : U \to E$ eine analytische Abbildung. Dann gilt für alle z mit $0 < |z - a| < r$ die Laurentzerlegung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit $d_{-n} = c_n$ für $n \geq 1$. Die erste Reihe in der Summe definiert den Nebenteil der Funktion, die zweite den Hauptteil. Beide Reihen konvergieren für $0 < |z - a| < r$, und es ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-a)^{n+1}} \qquad d_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (x-a)^{n-1} f(x)\mathrm{d}x \ ,$$

wobei γ der geschlossene Weg $t \mapsto a + r\mathrm{e}^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ ist.

Definition 1.4.2
In der eben beschriebenen Situation mit den eben eingeführten Bezeichnungen definieren wir:

1. *Ist der Hauptteil $u \neq 0$, so sagen wir a sei ein isolierter singulärer Punkt von f.*
2. *Ist der Hauptteil u ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so nennen wir a einen Pol von f der Ordnung n oder auch der Polstellenordnung n.*
3. *Andernfalls, d.h. wenn es unendlich viele Werte von m mit $d_m \neq 0$ gibt, nennen wir a einen wesentlich singulären Punkt oder eine wesentliche Singularität von f.*
4. *Allgemein definieren wir die Ordnung $\omega(a; f)$ von f im Punkt a wie folgt:*
   - *$\omega(a; f) = -\infty$, wenn a eine wesentliche Singularität von f ist.*
   - *$\omega(a; f) = -n$, wenn a ein Pol der Ordnung $n \geq 1$ ist. (Man beachte das Vorzeichen!)*
   - *$\omega(a; f) = m$, wenn $f \neq 0$ und $u = 0$ ist und in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, die für $0 < |z-a| < r$ gleich $f(z)$ ist, m die kleinste ganze Zahl mit $c_m \neq 0$ ist. Ist $m > 0$, so nennen wir auch a eine Nullstelle der Ordnung m von f.*
   - *Schließlich setzen wir noch $\omega(a; 0) = \infty$ für die konstante Funktion 0.*

Es gilt:

Satz 1.4.3.
Ist eine Funktion f mit Werten in einem komplexen Banachraum E auf der offenen punktierten Kreisscheibe $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$ analytisch, so gilt genau dann $\omega(a; f) \geq n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, wenn eine Umgebung V von a in $\mathbb{C}$ existiert, so dass $(z-a)^{-n} f(z)$ auf $V \cap U$ beschränkt ist.

Definition 1.4.4
Sei eine Funktion f mit Werten in einem komplexen Banachraum E auf der offenen punktierten Kreisscheibe $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$ analytisch und a eine Singularität von f. Dann heißt a hebbar , falls sich f holomorph auf die offene Menge $U \cup \{a\}$ fortsetzen lässt, d.h. wenn es eine analytische Funktion $\tilde{f} : U \cup \{a\} \to E$ gibt mit $\tilde{f}|_U = f$.

Wir erhalten als Spezialfall aus Satz 1.4.3 für $n = 0$ das

Korollar 1.4.5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.**
Sei eine Funktion f mit Werten in einem komplexen Banachraum E auf der offenen punktierten Kreisscheibe $U := \{z \in \mathbb{C}|0 < |z-a| < r\}$ analytisch und a eine Singularität von a. Dann ist die Singularität a genau dann hebbar, wenn die Funktion f auf einer Umgebung von a beschränkt ist.

Definition 1.4.6
Sei eine Funktion f mit Werten in einem Banachraum E auf der offenen Menge $U := \{z \in \mathbb{C}|0 < |z-a| < r\}$ analytisch und a eine Singularität von f. Der Koeffizient $d_1 \in E$ im Hauptteil von f wird das Residuum von f im Punkt a genannt. Wir schreiben

$$c_{-1} = d_1 = \mathrm{res}_{z=a} f \ .$$

Bemerkungen 1.4.7.

1. *Nach der Koeffizientenformel aus dem Satz 1.4.1 über die Laurentzerlegung ist*

$$\mathrm{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} f(z) \mathrm{d}z$$

   für $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug.

2. *Ist die Singularität a hebbar, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz 1.2.8 das Residuum* $\mathrm{res}_{z=a} f = 0$.

3. *Eine analytische Funktion $f(z)$ habe einen Pol der Ordnung m an der Stelle z_0, so dass wir als Laurentreihe finden*

$$f(z) \ = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \dots \ .$$

   Dann hat die Funktion

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots$$

   eine hebbare Singularität in z_0. Wir setzen sie holomorph fort. Dann gilt

$$\mathrm{res}_{z=z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}|_{z=z_0} \left((z-z_0)^m f(z)\right) \quad .$$

Wir können nun einen weiteren klassischen Satz der Funktionentheorie formulieren:

Theorem 1.4.8 (Residuensatz).
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, (a_n) eine endliche oder unendliche Folge verschiedener Punkte von U und S die Menge der Punkte dieser Folge. Alle Punkte von S seien in U isolierte Punkte.

Ist nun f eine analytische Abbildung von $U \setminus S$ in einen komplexen Banachraum E und γ ein geschlossener Weg in $U \setminus S$, so gilt

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_n j(a_n; \gamma) \mathrm{res}_{a_n}(f) \ .$$

Dabei gibt es auf der rechten Seite nur endliche viele von Null verschiedene Glieder.

Wir setzen $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definition 1.4.9

1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und a ein Pol von f. Dann setzen wir $f(a) := \infty$, was wegen $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$ sinnvoll ist.*

2. *Sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine meromorphe Funktion auf U, wenn gilt*

   (a) *Die Polstellenmenge $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ ist diskret in U, d.h. $S(f)$ hat keinen Häufungspunkt.*

   (b) *Die Einschränkung $f|_{U \setminus S(f)}$ ist analytisch.*

   (c) *Alle Punkte aus $S(f)$ sind Polstellen von f.*

Wir können auch sagen: $f \neq 0$ ist genau dann auf $\mathbb{C}$ meromorph, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ ein $n_c \in \mathbb{Z}$, eine Umgebung U von c und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(z) = (z-c)^{n_c} \cdot g(z) \qquad \text{für alle} \quad z \in U \setminus \{c\} \quad \text{und} \quad g(c) \neq 0$$

gilt. Dann ist natürlich n_c die Ordnung von f in c.

Offenbar sind Linearkombinationen und Produkte von meromorphen Funktionen wieder meromorph. Nach dem dem Prinzip der Isoliertheit von Nullstellen von Satz 1.4.1, ist die Nullstellenmenge einer meromorphen Funktion f diskret. Daher ist $1/f$ auch meromorph. Es gilt:

Satz 1.4.10.
Die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen $\mathcal{M}$ bilden einen Körper.

Man kann zeigen, dass $\mathcal{M}$ der Quotientenkörper des Rings der ganzen Funktionen auf $\mathcal{M}$ ist. Unterkörper dieses Körpers werden uns im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen.

Satz 1.4.11 (Null- und Polstellen zählendes Integral)**.**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine auf U meromorphe Funktion mit endlich vielen Nullstellen und Polstellen. Seien diese Null- und Polstellen mit $a_1, \ldots a_n$ bezeichnet. Sei $\gamma : I \to U$ ein geschlossener Weg mit $a_j \notin \gamma(I)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{n} j(a_n;\gamma)\omega(f;a_n)$$

Wir reformulieren einen Spezialfall:

Korollar 1.4.12 (Argumentprinzip)**.**
Es gelten die gleichen Voraussetzungen. Seien $a_1, a_2, \ldots a_r$ die Nullstellen von f und $a_{r+1}, \ldots a_N$ die Polstellen. Setze

$$N(0) := \sum_{n=1}^{r} \omega(f;a_n)$$

die (mit der Vielfachheit gewichtete) Gesamtzahl der Nullstellen und

$$N(\infty) := -\sum_{n=r+1}^{N} \omega(f;a_n)$$

die mit der Vielfachheit gewichtete) Gesamtzahl der Polstellen. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = N(0) - N(\infty)$$

für jeden Weg γ, der jeden der Punkte a_n genau einmal im positiven Sinne umläuft.

2 Elliptische Funktionen

2.1 Die Sätze von Liouville

Definition 2.1.1

Ein Gitter in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist eine freie Untergruppe $L \subset \mathbb{C}$ vom Rang 2, die $\mathbb{C}$ über den reellen Zahlen erzeugt, $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$.

Wenn ω_1, ω_2 eine Basis von L ist, schreiben wir auch $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Natürlich sind ω_1, ω_2 nicht eindeutig. Da die beiden Vektoren linear unabhängig sind, ist $\mathrm{Im}\,(\omega_1/\omega_2) \neq 0$. Nachdem wir gegebenfalls ω_1 und ω_2 vertauschen, können wir annnehmen, dass $\mathrm{Im}\,(\omega_1/\omega_2) > 0$ gilt, d.h. dass ω_1/ω_2 in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ liegt.

Definition 2.1.2
Eine elliptische Funktion ist eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die L-periodisch ist, d.h. für die

$$f(z+\omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \omega \in L \text{ gilt.}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Bemerkungen 2.1.3.

1. *Eigentlich sollte man für jedes Gitter $L \subset \mathbb{C}$ von L-elliptischen Funktionen sprechen. Da wir zunächst das Gitter festhalten werden, werden dies aber nicht tun.*
2. *Natürlich sind Polstellenmenge und Nullstellenmenge einer elliptischen Funktion auch mit L periodisch.*
3. *Mit zwei Funktionen f, g sind auch die folgenden Funktionen elliptisch:*

$$f+g, \quad f \cdot g, \quad f'$$

und, falls f nicht konstant gleich Null ist, $1/f$. Die zum Gitter L elliptischen Funktionen bilden also einen Körper $K(L)$, der wegen der konstanten Funktionen den Körper $\mathbb{C}$ als Unterkörper enthält.

Satz 2.1.4 (1. Satz von Liouville)**.**
Eine ganze *elliptische Funktion ist konstant, denn sie kann als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\mathbb{C}/L$ gesehen werden, ist also beschränkt und nach dem Satz von Liouville 1.3.2 konstant.*

Für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ und jede Basis (ω_1, ω_2) des Gitters L heißt die Menge

$$\mathcal{F}_\alpha := \{\alpha + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t_i < 1\ \}$$

eine Grundmasche des Gitters L oder das Periodenparallelogramm in Bezug auf die Basis (ω_1, ω_2). Die Vereinigung der Bilder der Grundmasche unter allen Verschiebungen um Gittervektoren ist die komplexe Ebene

$$\mathbb{C} = \cup_{\omega \in L} \mathcal{F} + \omega$$

Der Quotient $\mathbb{C}/L$ trägt in natürlicher Weise die Struktur einer abelschen Gruppe. Topologisch ist er ein Torus, der Periodentorus $\mathbb{C}/L$.

Für jede meromorphe Funktion liegen die Polstellen diskret. Für eine gegebene elliptische Funktion f kann man daher die Grundmasche $\mathcal{F}$ so wählen, dass keine Pole von f auf dem Rand der Grundmasche liegen. Wir werden in der Folge öfters stimmschweigend annehmen, dass eine solche Wahl getroffen wurde.

Theorem 2.1.5 (2. Satz von Liouville).
Sei $\mathcal{F}$ eine Grundmasche eines Gitters L und sei f eine elliptische Funktion ohne Pole auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$. Dann verschwindet die Summe der Residuen von f in $\mathcal{F}$,

$$\sum_{z\in\mathcal{F}} \mathrm{res}(f,z) \ = 0 \ .$$

Beweis.
Es gilt

$$2\pi \mathrm{i} \sum \mathrm{res} f = \int_{\partial\mathcal{F}} f(z)\mathrm{d}z = 0 \ ,$$

wobei die letzte Gleichheit daher kommt, dass sich die Beiträge gegenüberliegender Kanten wegheben, da die Integrationsrichtungen entgegen gesetzt sind. □

Eine elliptische Funktion kann als meromorphe Funktion auf dem Torus $\mathbb{C}/L$ gesehen werden. Die Summe der Residuen einer solchen Funktion auf dem Torus verschwindet also.

Definition 2.1.6
Die Ordnung einer elliptischen Funktion ist die Anzahl aller Pole auf dem Periodentorus $\mathbb{C}/L$, wobei jeder Pol mit seiner Vielfachheit gezählt wird:

$$\omega(f) := -\sum_{a\in\mathcal{F}} \omega(f;a) \ .$$

Sie hängt nicht von der Wahl der Grundmasche ab.

Nach dem ersten Satz von Liouville sind also elliptische Funktionen der Ordnung 0 konstant. Das Residuum eines Pols erster Ordnung ist stets von Null verschieden. Daher folgt aus dem 2. Satz von Liouville, dass die Polstellenmenge einer elliptische Funktion nicht nur aus einem einzigen Pol erster Ordnung bestehen kann. Es gilt also

Korollar 2.1.7.
Es gibt keine elliptische Funktion der Ordnung 1.

Wir verallgemeinern den Begriff der Nullstellenordnung einer Funktion für beliebiges $b \in \hat{\mathbb{C}}$ zur b-Stellenordnung und setzen

$$\omega_b(f) := \omega(1/(f-b)) \ \ ;$$

Die Pole von $1/(f-b)$ sind die Nullstellen von $f-b$ und heißen b-Stellen von f. Es werden also die Stellen gezählt, an denen die Funktion f den Wert b annimmt, mit Vielfachheit. Wir nennen einen Pol eine ∞-Stelle und setzen $\omega_\infty(f) = \omega(f)$.

Theorem 2.1.8 (3. Satz von Liouville).
Jede nicht-konstante elliptische Funktion f nimmt auf $\mathbb{C}/L$ jeden Wert gleich oft an, wobei die Werte mit ihrer Vielfachheit zu rechnen sind.

Insbesondere hat f modulo L mit Vielfachheit gezählt gleich viele Nullstellen und Polstellen,

$$\omega_b(f) \ = \omega_\infty(f) = \omega(f) \ .$$

Beweis.

Mit f sind auch f' und $g := f'/f$ elliptisch. Das Wegintegral von g über den Rand einer Grundmasche $\partial\mathcal{F}$ verschwindet nach dem zweiten Satz von Liouville. Nach dem Satz 1.4.11 vom Pol- und Nullstellen zählenden Integral gilt

$$0 = \int_{\partial\mathcal{F}} f'/f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_i \mathrm{res}(f'/f) = \omega_0(f) \ - \omega_\infty(f) \ .$$

Angewandt auf $1/(f-b)$ liefert dies

$$\omega_b(f) \ \overset{Def}{=} \omega(1/(f-b)) = \omega_0(1/(f-b)) = \omega(f) \ ,$$

wobei die letzte Gleichheit daher kommt, dass die Funktion $1/(f-b)$ genau dann einen Pol hat, wenn $f-b$ eine Nullstelle hat und umgekehrt. □

Wir können noch etwas mehr sagen:

Theorem 2.1.9.
Sei f eine elliptische Funktion und seien $\{a_i\}$ die singulären Stellen – Pole oder Nullstellen – von f in einer Grundmasche $\mathcal{F}$. Dann gilt

$$\sum_i \omega(f, a_i)\ a_i = 0 \bmod L \ .$$

Beweis.
Wir betrachten

$$\int_{\partial\mathcal{F}} z f'/f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum \omega(f, a_i)a_i \ ,$$

und berechnen das Integral über Paare gegenüberliegender Ecken gleichzeitig. Ein Paar dieser Integrale ist

$$\int_\alpha^{\alpha+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z - \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z \ .$$

Im zweiten Integral substituieren wir $u := z - \omega_2$ und erhalten für die Differenz

$$-\omega_2 \int_\alpha^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u = 2\pi\mathrm{i}k\omega_2 \in 2\pi\mathrm{i}L$$

für eine ganze Zahl k. Mit dem anderen Seitenpaar verfährt man ähnlich. □

2.2 Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion

Ziel ist es, für ein gegebenes Gitter $L \subset \mathbb{C}$ eine möglichst einfache nicht-konstante elliptische Funktion zu finden. Wir suchen vor dem Hintergrund von Korollar 2.1.7 eine Funktion, die modulo des Gitters L genau einen Pol zweiter Ordnung hat.

Wir betrachten die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L'} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] \ ,$$

wobei die Summe in $L' := L \setminus \{0\}$ über alle von Null verschiedenen Vektoren von L geht. Die Funktion $\wp$ hängt vom Gitter ab; wir unterdrücken aber dennoch den Index $\wp_L$.

Wir überlegen uns zuerst, dass diese Reihe gleichförmig auf Kompakta konvergiert, die keinen Gitterpunkt enthalten.

Lemma 2.2.1.
Sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Für $s > 2$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{\omega \in L'} 1/|\omega|^s \ .$$

Beweis.
Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{|x\omega_1 + y\omega_2|^2}{x^2+y^2} \end{array}$$

besitzt ein positives Maximum: sie ist homogen, $f(\lambda z) = f(z)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$, und daher durch ihre Einschränkung auf den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ festgelegt. Dieser ist kompakt, so dass f auf S^1 ein strikt positives Minimum δ annimmt. Also existiert $\delta = \delta(\omega_1, \omega_2)$ mit

$$|n\omega_1 + m\omega_2|^2 \geq \delta(n^2 + m^2) \ .$$

Damit ist

$$\sum_{\omega \in L'} 1/|\omega|^s \leq \frac{1}{\delta} \sum_{(m,n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})'} \frac{1}{(m^2+n^2)^{s/2}} \ .$$

Diese Summe konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$I := \int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{s/2}} = 2\pi \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^{s-1}}$$

konvergiert. Dies ist der Fall für $s - 1 > 1$. □

Lemma 2.2.2.
Sei $M \subset L \setminus \{0\}$ eine Menge von Gitterpunkten. Die Reihe

$$\sum_{\omega \in M} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

konvergiert in $\mathbb{C} \setminus M$ normal und stellt dort eine analytische Funktion dar.

Beweis.
Wir formen um:

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z||z-2\omega|}{|\omega|^2|z-\omega|^2}$$

Hier tritt ω im Zähler in der ersten, im Nenner in der vierten Potenz auf. Wir betrachten diesen Ausdruck für Werte von z in einer abgeschlossenen Kreisscheibe, also für z mit $|z| \leq r$. Für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens können wir endlich viele Terme in der Summe über M weglassen und betrachten nur ω mit $|\omega| \geq 2r$. Dann ist wegen $|z| \leq r \leq \frac{|\omega|}{2}$ auch $|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{1}{2}|\omega|$ und ferner $|z - 2\omega| \leq 3|\omega|$, so dass wir die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{12r}{|\omega|^3}$$

bekommen, die unabhängig von z ist. Wir wenden jetzt Lemma 2.2.1 an. □

Aus dieser Abschnätzung und der Reihenentwicklung folgt, dass $\wp$ meromorph ist mit doppelten Polen an den Gitterpunkten von L und keinen weiteren Polen. Da die Funktion $\wp$ nach Lemma 2.2.2 gleichmäßig absolut auf Kompakta in $\mathbb{C} \setminus L$ konvergiert, dürfen Summanden umgeordnet werden. Außerdem ist $\wp$ gerade,

$$\wp(-z) = \wp(z) \ .$$

Die Ableitung

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

kann als Summe über alle Gittervektoren geschrieben werden. Sie hat Pole dritter Ordnung an den Gitterpunkten. Die Funktion $\wp'(z)$ ist periodisch und ungerade,

$$\wp'(-z) = -\wp'(z) \ .$$

Satz 2.2.3.
Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion ist eine elliptische Funktion der Ordnung 2. Ihre Ableitung ist eine elliptische Funktion der Ordnung 3.

Beweis.
Die Periodizität der Ableitung $\wp'$ folgt sofort aus der Tatsache, dass über alle Gittervektoren summiert wird. Daher gilt für $\wp$ als Stammfunktion

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z) + c$$

mit einer geeigneten Konstante c. Betrachte $z = -\frac{\omega_1}{2}$, was kein Pol von $\wp$ ist. Dann folgt

$$\wp(\frac{\omega_1}{2}) = \wp(-\frac{\omega_1}{2}) + c$$

und, weil $\wp$ gerade ist, $c = 0$. Also ist auch $\wp$ periodisch, was aus der Definition nicht ersichtlich war. □

Wir untersuchen die Nullstellen der Ableitung $\wp'$ der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion.

Satz 2.2.4.
Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann eine Nullstelle von $\wp'$, wenn

$$a \notin L \qquad \text{und} \quad 2a \in L$$

gilt. Es gibt also auf dem Periodentorus $\mathbb{C}/L$ genau 3 Nullstellen, die alle einfach sind.

Beweis.
Es gilt für die genannten a:

$$\wp'(a) = \ \wp'(a - 2a) \ = \ \wp'(-a) = \ -\wp'(a)$$

so dass Nullstellen von $\wp'$ vorliegen müssen. Da die drei Punkte

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

paarweise verschiedene Punkte des Periodentorus sind, haben wir drei Nullstellen gefunden. Nach dem 3. Satz von Liouville 2.1.8 kann es keine weiteren Nullstellen geben und keine Nullstelle mehrfache Nullstelle sein. □

Satz 2.2.5.
Die sogenannten Halbwerte der $\wp$-Funktion

$$e_1 := \wp(\frac{\omega_1}{2}) \qquad e_2 := \wp(\frac{\omega_2}{2}) \quad \text{und} \quad e_3 := \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$$

sind paarweise verschieden und hängen, bis auf die Reihenfolge, nur vom Gitter L, nicht aber von der Wahl der Basis (ω_1, ω_2) ab.

Beweis.
Angenommen, es gälte $e_1 = e_2$. Dann wird dieser Wert $b := e_1 = e_2$ mindestens viermal von $\wp$ angenommen, nämlich wegen des Verschwindens der Ableitung mit Vielfachheit zwei an den Stellen $\frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega_2}{2}$, die modulo L inäquivalent sind.Die $\wp$-Funktion hat aber Ordnung zwei und kann daher nach Theorem 2.1.8 nur zwei b-Stellen besitzen.

Die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis folgt aus der Definition als Bildwerte der $\wp$-Funktion an den drei Nullstellen der Ableitung $\wp'$. □

Satz 2.2.6.
Seien $w, z \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\wp(z) = \wp(w)$$

genau dann, wenn $z = w \bmod L$ oder $w = -z \bmod L$.

Beweis.
Die Funktion

$$z \mapsto \wp(z) - \wp(w)$$

ist für festes w eine elliptische Funktion der Ordnung zwei und hat also mod L genau zwei Nullstellen. Diese sind $z = w$ und $z = -w$. Genau im Falle $w = -w \bmod L$ liegt eine doppelte Nullstelle vor. □

Damit verstehen wir gut das Abbildungverhalten der Funktion

$$\wp : \ \mathbb{C}/L \ \to \hat{\mathbb{C}} \ .$$

Definition 2.2.7
Sei f eine nicht-konstante elliptische Funktion. Ein Punkt $b \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt Verzweigungspunkt von f, falls es eine Stelle $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass a eine mehrfache b-Stelle ist. Die Stelle a heißt dann auch ein Windungspunkts von f. Im Falle $b = \infty$ bedeutet dies natürlich, dass a ein Pol der Ordnung ≥ 2 ist.

Bei der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion liegen mit e_1, e_2, e_3 und ∞ genau vier Verzweigungspunkte vor, also Funktionswerte, die mit höherer Multiplizität zwei angenommen werden.

Wir können auch eine erste Differentialgleichung für die $\wp$-Funktion herleiten:

Satz 2.2.8.
Sei L ein Gitter. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus L$ gilt die Differentialgleichung

$$\wp'(z)^2 = \ 4(\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3) \ ,$$

wobei e_1, e_2 und e_3 die Halbwerte des Gitters L sind.

Beweis.
Wir vergleichen die elliptische Funktion $\wp'(z)^2$ mit der elliptischen Funktion

$$f(z) := 4(\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3) \ .$$

Diese Funktionen haben modulo L beide nur doppelte Nullstellen an den drei Stellen

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2}, \quad \text{und} \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \ ,$$

vergleiche Satz 2.2.4. Die Funktionen haben beide in 0 einen Pol der Ordnung 6. Damit ist ihr Quotient konstant. Der Vergleich der Koeffizienten von z^{-6} zeigt, dass der Quotient gleich 1 ist. □

Dieses Verhalten ist für elliptische Funktionen vom Grad 2 typisch:

Satz 2.2.9.
Jede elliptische Funktion $f : \mathbb{C}/L \to \hat{\mathbb{C}}$ vom Grad 2 hat vier Windungspunkte $a_1, \ldots, a_4$ mit paarweise verschiedenen Werten $e_i := f(a_i)$. Mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$\begin{array}{rcll} (f')^2 & = & c(f-e_1)(f-e_2)(f-e_3)(f-e_4) & \textit{wenn} \quad e_1, e_2, e_3, e_3 \in \mathbb{C} \\ (f')^2 & = & c(f-e_1)(f-e_2)(f-e_3) & \textit{wenn} \quad e_4 = \infty \end{array}$$

Beweis.
Seien $a_1, \ldots a_n$ die Urbilder der Windungsspunkte von f. Da der Grad von f gleich zwei ist, wird jeder Wert mit Vielfachheit zwei angenommen und die Funktionswerte $e_i := f(a_i)$ sind paarweise verschieden. Angenommen, keiner dieser Werte e_i ist gleich ∞. Dann hat f zwei einfache Pole bei $b_1 \neq b_2$. Die Funktion f' hat genau an diesen beiden Stellen Pole der Ordnung 2. Die Funktion f' hat eine Nullstelle bei allen $a_1, a_2 \ldots, a_n$.

Nach Satz 2.1.9 folgt $n = 4$. Damit sind aber wieder die linke und die rechte Seite elliptische Funktionen mit gleicher Polstellen- und Nullstellenmenge, also unterscheiden sie sich nur um eine multiplikative Konstante.

Im Fall $e_n = \infty$ argumentiert man ähnlich. □

Die Laurentreihe der $\wp$-Funktion

$$\wp(z) \ = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

liefert noch weitere interessante Größen. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) \ := \wp(z) \ - \frac{1}{z^2}$$

und finden für die Koeffizienten

$$a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^{2(n+1)}} \ .$$

Man mache sich klar, dass die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion von einem Gitter L abhängt und somit auch die Koeffizienten a_{2n} Funktionen auf dem Raum der Gitter in $\mathbb{C}$ sind.

Satz 2.2.10.
Die sogenannten Eisensteinreihe

$$G_n := \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^n}$$

konvergiert für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ *absolut. Es gilt*

$$\wp(z) \ = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} \ z^{2n}$$

auf der größten punktierten offenen Kreisscheibe um 0*, die keinen von Null verschiedenen Gitterpunkt trifft.*

Wir werden später die Eisensteinreihen als Funktion auf dem Raum aller Gitter in $\mathbb{C}$ untersuchen. Für $n = 2$ konvergiert die Eisensteinreihe, aber nicht normal. Man muss daher bei Umordnungen für die Funktion G_2 sehr aufpassen, vgl. Freitag-Busam Kapitel VII.1. Für die Rolle der Funktion G_2 bei Anomalien in perturbativer Stringtheorie verweisen wir auf Abschnitt 9 in W. Lerche, A.N. Schellekens und N. Warner, Lattices and Strings, Physics Reports 1 (1989) 1-140.

Wir wollen nun noch beschreiben, wie man den Körper der elliptischen Funktionen zu einem Gitter L durch die Weierstraß'sche Funktion $\wp_L$ beschreiben kann. Dazu machen wir uns klar, dass man durch das Einsetzen einer elliptischen Funktion in ein Polynom wieder eine elliptische Funktion erhält. Gleiches gilt, wenn man eine elliptische Funktion f in eine rationale Funktion, also eine meromorphe Funktion $\mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$, die sich als Quotient zweier Polynome darstellen lässt, einsetzt. Man erhält dann einen Unterkörper

$$\mathbb{C}(f) \ := \{ g = \ R(f) \quad \text{mit } R \text{ rationale Funktion } \} \subset K(L) \ .$$

Satz 2.2.11.
Sei $f \in K(L)$ *eine gerade elliptische Funktion, deren Polstellenmenge im Gitter* L *enthalten ist. Dann lässt sich* f *als Polynom in der Weierstraß'schen Funktion* $\wp$ *schreiben.*

Beweis.
Wir schließen induktiv nach der Ordnung von f. Für Ordnung Null ist f nach dem ersten Satz von Liouville 2.1.4 konstant, es ist nichts zu zeigen.

Ist f nicht konstant, so muss f einen Pol in jedem Gitterpunkt haben. Wir betrachten die Laurentreihe in 0

$$f(z) = a_{-2n} z^{-2n} + a_{-2n+2} z^{-2n+2} + \dots \ ,$$

die nur gerade Potenzen enthalten kann, weil f gerade ist. Dann ist

$$g = \ f - a_{-2n} \wp^n$$

eine gerade elliptische Funktion niedrigerer Ordnung, deren Polstellenmenge in L enthalten ist. Nach Induktionsannahme können wir g als Polynom in $\wp$ schreiben. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 2.2.12.
Jede gerade *elliptische Funktion ist als rationale Funktion der Weierstraß'schen* $\wp$*-Funktion darstellbar.*

Der Körper der geraden elliptischen Funktionen ist also gleich $\mathbb{C}(\wp)$ *und daher isomorph zum Körper der rationalen Funktionen. Identifiziert man die konstanten elliptischen Funktionen mit dem Grundkörper* $\mathbb{C}$*, so hat dieser Körper Transzendenzgrad 1 über* $\mathbb{C}$*.*

Beweis.
Sei f eine nicht-konstante gerade elliptische Funktion mit einem Pol a, der nicht auf dem Gitter L liegt. Die Funktion

$$z \mapsto (\wp(z) \ - \wp(a))^N f(z)$$

hat für hinreichend großes N in a eine hebbare Singularität. Polstellen von f liegen isoliert, so dass wir in der Grundmasche nur endlich viele Pole haben, die nicht Gitterpunkte sind. Wir beseitigen diese durch Multiplikation mit endlich vielen Faktoren:

$$g(z) \ := \ f(z) \ \prod_{i=1}^{m} (\wp(z) \ - \wp(a_j))^{N_j}$$

hat dann nur auf dem Gitter L Pole und ist nach Satz 2.2.11 ein Polynom in $\wp$. □

Theorem 2.2.13.
Der Körper der elliptischen Funktionen bezüglich des Gitters L wird von den Funktionen $\wp$ und $\wp'$ erzeugt:

$$K(L) \ = \ \mathbb{C}(\wp) \ \oplus \mathbb{C}(\wp) \ \wp' \ .$$

Insbesondere hat der Körper $K(L)$ Transzendenzgrad 1 über dem Körper der komplexen Zahlen.

Beweis.
Jede elliptische Funktion lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden elliptischen Funktion schreiben,

$$f(z) \ = \ \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)) \ .$$

Der Quotient einer ungeraden elliptischen Funktion durch eine ungeraden elliptischen Funktion wie $\wp'$ ist aber eine gerade elliptische Funktion. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 2.2.12. □

Korollar 2.2.14.
Sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und e_1, e_2 und e_3 die Halbwerte der zu L gehörigen $\wp$-Funktion. Dann gilt die Isomorphie von Körpern

$$K(L) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/ \ I(X,Y) \quad ,$$

wobei $I(X,Y)$ das von $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ erzeugte Hauptideal im Polynoming $\mathbb{C}(X)[Y]$ über dem Körper $\mathbb{C}(X)$ bezeichnet. Da $K(L)$ ein Körper ist, ist das Hauptideal ein maximales Ideal und das Polynom $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ irreduzibel über dem Körper $\mathbb{C}(X)$.

Beweis.
Der Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & \mathbb{C}(X)[Y] & \to & K(L) \\ & X & \mapsto & \wp \\ & Y & \mapsto & \wp' \end{array}$$

ist nach Theorem 2.2.13 surjektiv. Der Ring $\mathbb{C}(X)[Y]$ ist ein Polynomring über einem Körper, also ein euklidischer Ring. Nach Division mit Rest schreiben wir ein beliebiges Polynom $f \in \mathbb{C}(X)[Y]$ in der Form

$$f(X,Y) \;=\; \big(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)\big)\, q(X,Y) + r(X,Y)$$

mit Rest $r(X,Y) \;=\; r_1(X) + r_2(X)\; Y$ mit $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(X)$. Wegen der Differenzialgleichung in Satz 2.2.8 ist f genau dann im Kern von Φ, wenn $0 = r(\wp, \wp') = r_1(\wp) + r_2(\wp)\wp'$ gilt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn r verschwindet. Die Behauptung folgt nun aus dem Homomorphiesatz für Ringe. □

Wir illustrieren am Beispiel der elliptischenFunktion $(\wp')^2$, wie man eine gegebene elliptische Funktion durch rationale Funktionen in $\wp$ ausdrücken kann. Wir kennen bereits die Laurentreihe von $\wp$:

$$\wp(z) \;=\; z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots$$

die wir gliedweise ableiten

$$\wp'(z) \;=\; -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots \;.$$

Durch Quadrieren finden wir

$$\wp'(z)^2 = 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots \;.$$

Andererseits finden wir durch Quadrieren:

$$\wp(z)^2 = \; z^{-4} + 6G_4 + 10G_6 z^2 + \dots$$

und weiteres Multiplizieren:

$$(\wp(z))^3 = \; z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots$$

Man findet daraus die Gleichung

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots$$

Dies ist eine elliptische Funktion ohne Pole und daher konstant. Wir finden:

Theorem 2.2.15 (Algebraische Differentialgleichung für die Weierstraß-Funktion)**.**
Es gilt

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) \; - g_3$$

mit den sogenannten <u>*Weierstraß-Invarianten*</u>

$$g_2 = \; 60G_4 = \; 60 \sum_{\omega \in L'} \omega^{-4}$$

und

$$g_3 = \; 140G_6 = 140 \sum_{\omega \in L'} \omega^{-6} \;.$$

Differenziert man die Differentialgleichung und kürzt durch $\wp'(z)$, so findet man

$$2\wp''(z) \;=\; 12\wp(z)^2 - g_2$$

und ähnliche weitere Gleichungen. Sie lassen sich als Relationen zwischen den Eisensteinreihen G_n auffassen. Man kann diese Relationen benützen, um zu zeigen, dass alle Eisensteinreihen G_n mit $n \geq 8$ sich als rationale Polynome in G_4 und G_6 darstellen lassen.

Betrachtung 2.2.16.
Wir wollen noch die beiden Differentialgleichungen

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3) \ .$$

aus Satz 2.2.8 und

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

aus Theorem 2.2.15 vergleichen. Da $\wp$ mehr als drei Werte annimt, folgt

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) \ .$$

Wir können dann auch den Körper der elliptischen Funktionen beschreiben durch

$$K(L) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$0 = e_1 + e_2 + e_3 \quad g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \quad g_3 = 4e_1e_2e_3 \ .$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass daraus

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$$

folgt, was stets ungleich Null ist, weil die Hauptwerte nach Satz 2.2.5 paarweise verschieden sind. Diese Zahl $\Delta = \Delta(L) = g_2^3 - 27g_3^2$ heißt Diskriminante des Gitters L. Wir werden später sehen, dass es für vorgegebene Werte von g_2 und g_3 genau dann ein Gitter gibt, wenn die Diskriminante $g_2^3 - 27g_3^2$ von Null verschieden ist.

Betrachtung 2.2.17.

1. *Wir machen noch eine Bemerkung über Untergitter $\tilde{L} \subset L$. Ein Untergitter ist hierbei eine Untergruppe von L, die ihrerseits wieder ein Gitter ist, also $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ erzeugt.*

2. *Für ein Untergitter ist $L/\tilde{L}$ eine endliche abelsche Gruppe. Sei V ein Vertretersystem des Quotienten in L. Dann lässt sich jedes $\omega \in L$ eindeutig schreiben als Summe $\omega = v + \omega'$ mit $v \in V$ und $\tilde{\omega} \in \tilde{L}$. Wir können annehmen, dass $0 \in V$ gilt.*

3. *In diesem Fall ist offenbar $K(L) \subset K(\tilde{L})$ eine Körpererweiterung, denn meromorphe Funktionen, die mit dem feineren Gitter L periodisch sind, sind erst recht mit $\tilde{L}$ periodisch. Diese Körpererweiterung wollen wir näher untersuchen.*

4. *Für jedes $v \in V$ ist*

   $$\tilde{\wp}_v(z) := \wp(z + v, \tilde{L}) \in K(\tilde{L})[X]$$

   eine bezüglich $\tilde{L}$ elliptische Funktion. Das Polynom

   $$P_{L,\tilde{L}}(X) := \prod_{v \in V} (X - \tilde{\wp}_v) \in K(\tilde{L})[X]$$

   hat Grad $|V| = [L : \tilde{L}]$. Es hängt nicht von der Wahl des Vertretersystems V ab.

   Verschiebungen um Gittervektoren $\omega \in L$, also $z \mapsto z + \omega$, permutieren die Nullstellen des Polynoms $P_{L,\tilde{L}}$. Dessen Koeffizienten sind aber elementarsymmetrische Polynome in den Nullstellen $\tilde{\wp}_v$, also gerade elliptische Funktionen zum feineren Gitter L. Es folgt mit Satz 2.2.12, dass das Polynom $P_{L,\tilde{L}}$ schon im Polynomring $\mathbb{C}(\wp)[X]$ liegt.

Lemma 2.2.18.
Das Polynom $P_{L,\tilde{L}} \in K(L)[X]$ ist irreduzibel und hat $K(\tilde{L})$ als Zerfällungskörper. Der Grad der Körpererweiterung von $K(\tilde{L})$ über $K(L)$ ist gleich dem Index $[L : \tilde{L}]$.

Beweis.
Die Abbildungen $z \mapsto z + \omega$ mit $\omega \in L$ induzieren Automorphismen von $K(\tilde{L})$, die den Unterkörper $K(L)$ elementweise fest lassen. So erhält man eine Gruppe von Automorphismen der Körpererweiterung, die auf den Nullstellen von $P_{L,\tilde{L}}$ transitiv operieren. Da die Nullstellen $\tilde{\wp}_v$ nach Satz 2.2.6, angewandt auf das Gitter $\tilde{L}$, paarweise verschieden sind, ist das Polynom irreduzibel.

Der Zerfällungskörper von P enthält $\tilde{\wp}$ und somit den Körper $\mathbb{C}(\tilde{\wp})$ der geraden elliptischen Funktionen. Da aber die ungerade Funktion $\tilde{\wp}'$ in $K(L)$ liegt, enhält der Zerfällungskörper auch die ungeraden elliptischen Funktionen, ist also gleich $K(\tilde{L})$. □

Satz 2.2.19.
Ist $\tilde{L} \subset L$ ein Untergitter, so ist die Körpererweiterung $K(\tilde{L})/K(L)$ galoisch mit Galoisgruppe isomorph zur Faktorgruppe $L/\tilde{L}$.

Beweis.
Wir haben schon mit den Verschiebungen $z \mapsto z + v$ eine Untergruppe der Galoisgruppe angegeben, deren Fixkörper $K(L)$ ist. Die Behauptung folgt aus dem Hauptsatz der Galoistheorie. □

Die natürliche Projektion $\mathbb{C}/\tilde{L} \to \mathbb{C}/L$ beschreibt eine Überlagerung von Tori, wobei über jedem Punkt des Torus $\mathbb{C}/L$ genau $[L : \tilde{L}]$ Punkte des Torus $\mathbb{C}/\tilde{L}$ liegen. Die Faktorgruppe $L/\tilde{L}$ permutiert in natürlicher Weise diese Punkte. Es gibt allgemein tiefe Zusammenhänge zwischen Überlagerungen und Galoisgruppen.

2.3 Das Additionstheorem und elliptische Kurven

Definition 2.3.1
Ein Teilmenge $X \subset \mathbb{C}^2$ heißt <u>ebene affine Kurve</u>, wenn es ein nichtkonstantes Polynom

$$P = \sum_{i,j} a_{ij} z_1^i z_2^j$$

in zwei Variablen gibt, so dass X die Nullstellenmenge dieses Polynoms ist,

$$X = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid P(z) = 0\}$$

Als Beispiel betrachten wir im Hinblick auf Betrachtung 2.2.16 für $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$

$$X(g_2, g_3) := \{(z_1, z_2) : z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_1 - g_3\}$$

Wir nehmen nun an, dass es ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ gibt mit

$$g_2 = g_2(L) \quad \text{und} \quad g_3 = g_3(L) \ .$$

(Dies ist genau dann der Fall, wenn $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ gilt.) Aus der algebraischen Differentialgleichung in Theorem 2.2.15 für die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion für dieses Gitter folgt, dass wir eine Abbildung bekommen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}/L \setminus \{0\} & \to & X(g_2, g_3) \\ [z] & \mapsto & (\wp(z), \wp'(z)) \end{array}$$

Satz 2.3.2.
Diese Abbildung definiert eine Bijektion des punktierten Torus auf die ebene affine Kurve $X(g_2, g_3)$.

Beweis.

1. Surjektivität: sei $(u, v) \in X(g_2, g_3)$. Da die $\wp$-Funktion Grad 2 hat und somit nach dem dritten Satz von Liouville 2.1.8 jeden Wert mit Vielfachheit zwei annimmt, existiert ein $z \in \mathbb{C} \setminus L$ mit $u = \wp(z)$. Aus der algebraischen Differentialgleichung 2.2.15 folgt

   $$\wp'(z) = \pm v \ .$$

   Daher ist entweder $(\wp(z), \wp'(z))$ oder $(\wp(-z), \wp'(-z))$ gleich (u, v).

2. Injektivität: Es sei $\wp(z) = \wp(w)$ und $\wp'(z) = \wp'(w)$ für zwei $z, w \in \mathbb{C} \setminus L$. Dann ist nach Satz 2.2.11 entweder $z = w \bmod L$ oder $z = -w \bmod L$. Im zweiten Fall ist aber $\wp'(z) = -\wp'(z) = 0$, also $2z \in L$ nach Satz 2.2.4. Dann gilt aber auch wieder $z = w \bmod L$.

□

Wir wollen lieber nicht mit dem punktierten Torus arbeiten.

Definition 2.3.3
Sei $n \in \mathbb{N}$. Der n-dimensionale komplexe projektive Raum $P^n\mathbb{C}$ ist die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{C}^{n+1}$.

Bemerkungen 2.3.4.

1. *Man kann die Menge $P^n\mathbb{C}$ mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen. Für den Moment sehen wir davon ab.*

2. *Wir bezeichnen mit $[z_0, \dots z_n]$ den eindimensionalen Untervektorraum, der den Punkt $(z_0, \dots z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ enthält. Die Einträge $[z_0, \dots z_n]$ heißen homogene Koordinaten des Punktes in $P^n\mathbb{C}$.*

3. *Zwei homogene Koordinaten $[z_0, \dots z_n]$ und $[z'_0, \dots z'_n]$ beschreiben den gleichen Punkt in $P^n\mathbb{C}$, wenn es ein $t \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $z'_i = tz_i$ für $i = 0, \dots n$.*

4. *Wir betrachten den Unterraum*

   $$A^n\mathbb{C} := \{[z] \in P^n\mathbb{C} \mid z_0 \neq 0\} \ .$$

   Die Abbildung

   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^n & \to & A^n\mathbb{C} \\ (z_1, \dots, z_n) & \mapsto & [1, z_1, \dots z_n] \end{array}$$

ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung

$$[z_0, z_1, \dots z_n] \mapsto (\frac{z_1}{z_0}, \dots \frac{z_n}{z_0})$$

Die Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} P^{n-1}\mathbb{C} & \to & P^n\mathbb{C} \setminus A^n\mathbb{C} \\ [z_1, \dots, z_n] & \mapsto & [0, z_1, \dots, z_n] \end{array}$$

ist eine Bijektion, die das Komplement des affinen Unterraums $A^n\mathbb{C}$ beschreibt.

5. *Für $n = 0$ erhalten wir einen Punkt. Für $n = 1$ erhalten wir eine Ein-Punkt-Komplementierung der komplexen Gerade $\mathbb{C}$, die wir mit der Riemannschen Zahlenkugel identifizieren können.*

Wir brauchen auch noch geeignete Funktionen auf projektiven Räumen.

Definition 2.3.5
Ein Polynom in $n+1$ Variablen heißt homogen vom Grade $d \in \mathbb{N}$, wenn für alle $t \in \mathbb{C}$ gilt

$$P(tz_0, \dots, tz_n) \;=\; t^d P(z_0, \dots, z_n)$$

Sei P ein homogenes Polynom in drei Variablen. Mit $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ ist auch für jedes $t \in \mathbb{C}^*$ das Element $(tz_0, tz_1, tz_2) \in \mathbb{C}^3$ Nullstelle des homogenen Polynoms P. Es ist daher sinnvoll, zu betrachten

$$\tilde{X}_P := \; \{[z] \in P^2\mathbb{C} \mid P(z) = 0 \;\} \subseteq P^2\mathbb{C} \; .$$

Definition 2.3.6
Eine Teilmenge $\tilde{X} \subset P^2\mathbb{C}$ heißt ebene projektive Kurve, falls es ein homogenes Polynom P in 3 Variablen gibt, so dass

$$\tilde{X} = \{[z] \in P^2\mathbb{C} \;\mid P(z) = 0\}$$

gilt.

Zu jedem nichtkonstanten Polynom

$$P(z_1, z_2) \;= \sum a_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

in zwei Variablen betrachten wir seine Homogenisierung $\tilde{P}$. Sei d das Maximum der Werte von $n_1 + n_2$ mit $a_{n_1 n_2} \neq 0$. Wir definieren das homogene Polynom

$$\tilde{P}(z_0, z_1, z_2) := \sum a_{n_1 n_2} z_0^{d-n_1-n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$$

Unter der Abbildung $\mathbb{C}^n \to P^n\mathbb{C}$ wird die Nullstellenmenge von P bijektiv abgebildet auf

$$X_P \leftrightarrow \tilde{X}_{\tilde{P}} \cap A^2\mathbb{C} \; ;$$

im Komplement liegen nur Punkte mit homogenen Koordinaten $[0, z_1, z_2]$. Diese setzen sich zusammen aus Punkten der Form $[0, 1, z]$ und dem Punkt $[0, 0, 1]$. Der Schnitt mit $\tilde{X}_{\tilde{P}}$ mit Punkten der ersten Art wird also durch die Nullstellen eines Polynoms in einer Variablen beschrieben, von denen es nur endlich viele gibt. Daher liegen im Komplement von X_P nur endlich viele Punkte von $\tilde{X}_{\tilde{P}}$. Auf Grund dieser Tatsachen heißt $\tilde{X}_{\tilde{P}}$ projektiver Abschluß von X_P.

In unserem Fall betrachten wir für vorgegebene komplexe Werte g_2, g_3 das Polynom

$$P(z_1, z_2) = z_2^2 - 4z_1^3 + g_2 z_1 + g_3$$

mit $d = 3$ und mit Homogenisierung

$$\tilde{P}(z_0, z_1, z_2) = z_0 z_2^2 - 4z_1^3 + g_2 z_0^2 z_1 + g_3 z_0^3 \ .$$

Für die unendlich fernen Punkte mit $z_0 = 0$ folgt $z_1 = 0$. Es gibt also nur den einzigen unendlich fernen Punkt $[0, 0, 1]$ auf dem projektiven Abschluss.

Theorem 2.3.7.
Sei L ein Gitter mit Weierstraß-Invarianten (g_2, g_3). Durch die Abbildung

$$\begin{array}{cccl} \Phi: & \mathbb{C}/L & \to & P^2\mathbb{C} \\ & [z] & \mapsto & \begin{cases} [1, \wp(z), \wp'(z)] & \textit{falls } z \notin L \\ [0, 0, 1] & \textit{falls } z \in L \end{cases} \end{array}$$

wird eine bijektive Abbildung des gesamten Torus $\mathbb{C}/L$ auf die ebene projektive Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ mit Gleichung

$$z_0 z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3$$

definiert. Man nennt $\tilde{X}(g_2, g_3)$ die zum Gitter L gehörige elliptische Kurve.

Wir wollen uns nun mit einem Additionstheorem für die Weierstraß'sche Funktion beschäftigen. Offenbar ist für jedes $w \in \mathbb{C}$ auch

$$z \mapsto \wp(z + w)$$

eine elliptische Funktion. Wir wissen schon, wie man eine solche Funktion in der Form $f(\wp) + \wp' g(\wp)$ mit f, g rationalen Funktionen in $\wp(z)$ ausdrückt. Man kann das explizit wie in der Rechnung vor Theorem 2.2.15 durchrechnen und erhält

Theorem 2.3.8 (Additionstheorem für die $\wp$-Funktion)**.**
Es seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus L$, so dass $z \pm w$ nicht in L liegen. Dann gilt

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right]^2 - \wp(z) - \wp(w) \ .$$

Zum Beweis könnte man zeigen, dass die Differenz beider Seiten eine elliptische Funktion in z ist, deren Hauptteile an den Stellen in L und $z \in L \pm w$ sich wegheben. Durch Grenzwertbildung $z \to w$ und Anwendung der Hôpitalschen Regel finden wir noch die Verdoppelungsformel

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right]^2 - 2\wp(z) \ .$$

Wir wollen, anstatt die skizzierten Beweisideen auszuführen, das Additionstheorem geometrisch deuten und beweisen.

Definition 2.3.9

Eine Teilmenge $G \subset P^2\mathbb{C}$ heißt (projektive) <u>Gerade</u>, wenn es zwei verschiedene Punkte $[z_0, z_1, z_2]$ und $[w_0, w_1, w_2]$ gibt, so dass G aus dem Bild der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P^1\mathbb{C} & \to & G \\ [\lambda, \mu] & \mapsto & [\lambda z_0 + \mu w_0, \lambda z_1 + \mu w_1, \lambda z_2 + \mu w_2] \end{array}$$

besteht. Diese Abbildung ist offenbar eine Bijektion.

Offenbar sind je zwei verschiedene Punkte von $P^2\mathbb{C}$ in genau einer Geraden enthalten. Da eine elliptische Kurve durch ein Polynom dritten Grades bestimmt wird, folgt, dass eine Gerade mit einer elliptischen Kurve genau drei Schnittpunkte (mit Vielfachheit gezählt) hat.

Der Torus $\mathbb{C}/L$ hat durch die Addition auf $\mathbb{C}$ die Struktur einer abelschen Gruppe, die wir mittels der Bijektion $\Phi : \mathbb{C}/L \to \tilde{X}(g_2, g_3)$ zu einer Gruppenstruktur auf die elliptische Kurve übertragen. Auch hier schreiben wir die Gruppe additiv.

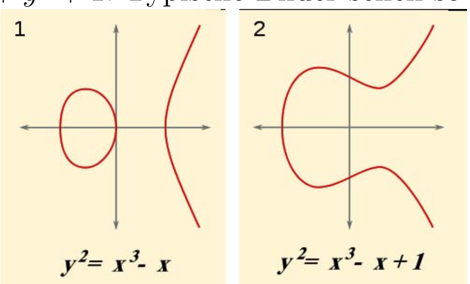
Es gilt

Theorem 2.3.10.
Drei paarweise verschiedene Punkte der elliptischen Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ haben unter der eben definierten Multiplikation genau dann die Summe Null, wenn sie auf einer projektiven Geraden liegen.

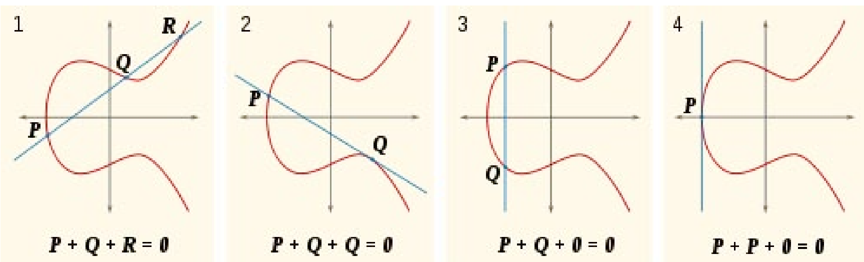
Wir veranschaulichen erst die Aussage. Dazu betrachten wir den Fall, in dem die Weierstraß-Invarianten g_2 und g_3 reell sind und betrachten den sogenannten reellen Anteil der elliptischen Kurve,

$$X_{\mathbb{R}} := X \cap \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\} .$$

Man beachte, dass dieser für gewisse Nullstellengebilde leer sein kann, etwa für $P(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Typische Bilder sehen so aus:



Wir veranschaulichen auch noch die Addition



Im ersten Bild haben wir eine generische Lage. Im zweiten Bild muss der Schnittpunkt Q mit Vielfachheit 2 gezählt werden. Im dritten Bild ist der unendlich ferne Punkt auf der dritte Schnittpunkt. Er ist das neutrale Element der Addition.

Wir brauchen für den Beweis von Theorem 2.3.10 einen Hilfssatz:

Lemma 2.3.11.

Betrachte für $u, v \in \mathbb{C} \setminus L$ mit $u \neq \pm v \bmod L$ die meromorphe Funktion

$$f_{u,v}(z) \ := \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix} \ .$$

Dies ist eine elliptische Funktion der Ordnung 3 mit Polen dritter Ordnung an den Gitterpunkten von L und den drei einfachen Nullstellen u, v und $-(u+v)$.

Insbesondere gilt für alle $u, v \in \mathbb{C} \setminus L$ mit $u + v \in \mathbb{C} \setminus L$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{1}$$

Beweis.
Die Funktion $f_{u,v}$ ist offenbar von der Form $A + B\wp(z) + C\wp'(z)$ mit einer von Null verschiedenen Konstanten $C = \wp(u) - \wp(v)$.

Sie hat also in den Gitterpunkten Pole dritter Ordnung und sonst keine Pole. Sie hat sicher die beiden Nullstellen $z = u$ und $z = v$ und kann als elliptische Funktion dritter Ordnung modulo L nur noch eine weitere Nullstelle haben.

Wir verwenden nun die Aussage aus Satz 2.1.9: sei $a_1, \ldots a_n$ ein Vertretersystem der Nullstellen von $f_{u,v}$ und $b_1 \ldots b_m$ ein Vertretersystem der Polstellen, wobei mehrfache Null- und Polstellen mehrfach in der Aufzählung auftreten sollen. Dann gilt $n = m$ und

$$(a_1 + \ldots + a_n) \ - (b_1 + \ldots b_n) \ \in L \ .$$

Daher muss die dritte Nullstelle bei $z = -(u+v) \bmod L$ liegen.

Für die zweite Aussage muss nur noch der Fall $u = v \bmod L$ betrachtet werden. Dann sind aber die zweite und dritte Zeile der Matrix gleich, und die Determinante verschwindet trivialerweise. □

Beweis.
von Theorem 2.3.10.

1. Als Erstes überlegen wir uns, dass das Schnittgebilde einer projektiven Geraden mit einer elliptischen Kurve durch ein Polynom in einer Variablen der Ordnung drei ausgedrückt wird. Daher hat der Schnitt einer projektiven Geraden mit einer elliptischen Kurve höchstens drei Punkte.

2. Aus der Definition einer projektiven Geraden folgt, dass die drei Punkte des projektiven Raums $P^2\mathbb{C}$ mit homogenen Koordinaten $[a_0, a_1, a_2]$, $[b_0, b_1, b_2]$ und $[c_0, c_1, c_2]$ genau dann auf einer Geraden liegen, wenn die Determinante der Matrix der homogenen Komponenten verschwindet,
$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$$
Die Bilder dreier Punkte $u, v, w \in \mathbb{C}/L$ auf dem Torus $\mathbb{C}/L$ unter der Abbildung Φ aus Theorem 2.3.7 liegen also genau dann auf einer projektiven Geraden in $P^2\mathbb{C}$, wenn
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(w) & \wp'(w) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{gilt} \ .$$

3. Verschwindet diese Determinante, so ist w eine Nullstelle der Funktion $f_{u,v}$ aus Lemma 2.3.11. Nach diesem Lemma gilt dann $w = -(u+v)$. Dies zeigt eine Implikation des Theorems.

4. Haben umgekehrt die Bilder $\Phi(u), \Phi(v)$ und $\Phi(w)$ Summe Null in $\tilde{X}(g_2, g_3)$, so gilt $w = -(u+v) \bmod L$. Nach Lemma 2.3.11 verschwindet dann die Determinante. Wir haben gerade in Punkt 2 gesehen, dass dann die Punkte auf einer projektiven Geraden liegen müssen. Somit ist auch die andere Implikation gezeigt.

□

Wir zeigen nun, wie aus dem geometrischen Theorem 2.3.10 das Additionstheorem 2.3.8 folgt:

Beweis.
Seien $u, v \in \mathbb{C} \setminus L$ vorgegeben. Wir betrachten die drei Punkte in $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{array}{lll} (x_1, y_1) & := & (\wp(u), \wp'(u)) \\ (x_2, y_2) & := & (\wp(v), \wp'(v)) \\ (x_3, y_3) & := & (\wp(u+v), -\wp'(u+v)) \end{array}$$

Wir wissen aus Lemma 2.3.11, dass die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \end{pmatrix}$$

verschwindet. Wir haben in Punkt 2 des Beweises von Theorem 2.3.10 gesehen, dass dann die drei Punkte auf einer komplexen Geraden $y = mx + b$ in $\mathbb{C}^2$ liegen. Die Steigung der Geraden ist

$$m = \frac{\wp'(v) - \wp(u)}{\wp(v) - \wp(u)} \ .$$

Aus der algebraischen Differentialgleichung 2.2.15 für die $\wp$-Funktion folgt, dass x_1, x_2 und x_3 die drei Nullstellen des kubischen Polynoms

$$4X^3 - g_2 X \ - g_3 - (mX + b)^2$$

sind. Der Koeffizientenvergleich der quadratischen Terme liefert

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m^2}{4} \ ;$$

das ist aber genau die Aussage des Additionstheorems 2.3.8. □

2.4 Elliptische Integrale

Wir nun endlich den Ursprung des Adjektivs elliptisch erklären.

Betrachtung 2.4.1.

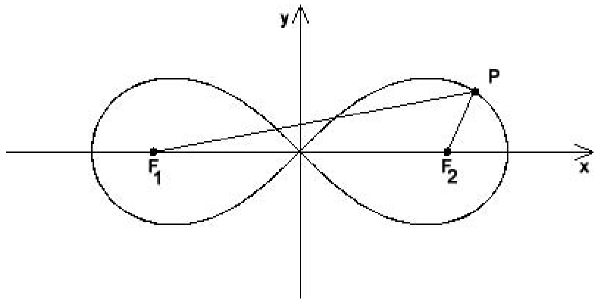
1. *Betrachtet man eine Ellipse in* $\mathbb{R}^2$ *mit Gleichung*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textit{mit} \quad 0 < b < a \ ,$$

so kann man nach der Länge des Bogens zwischen den beiden Punkten $(0,b)$ *und* (x,y) *auf der Ellipse fragen. Man findet das Integral*

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - k^2u^2}{a^2 - u^2}} \mathrm{d}u \quad \textit{mit} \quad k^2 := 1 - \frac{b^2}{a^2} \ .$$

2. *Noch etwas einfacher ist der Fall der* *Lemniskate, die definiert ist als der Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von den beiden Punkten* $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ *das konstante Produkt* $1/2$ *haben.*



Mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ *gilt*

$$2x^2 = r^2 + r^4 \qquad 2y^2 = r^2 - r^4 \ .$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$2(x^2 - y^2) = 2r^4$$

bzw. in Radialkoordinaten $r^2\cos(2\phi) = r^4$*, also* $r^2 = \cos(2\phi)$*. Für die Bogenlänge findet man für kleines* r

$$L(r) := \int_0^r \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} \ .$$

3. *Man kennt auch noch zahlreiche andere Probleme in Geometrie und Mechanik, die auf Integrale vom Typ*

$$\int R(u,v) \ \mathrm{d}u$$

mit R *einer rationalen Funktion und* $v^2 = P(u)$ *mit einem Polynom dritten oder vierten Grades. Man nennt solche Integrale* *elliptische Integrale. Ihre Betrachtung ist subtil, weil erst die Quadratwurzel definiert werden muss.*

Betrachten wir deshalb das Integral

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{P(u)}}$$

mit $P(t)$ einem reellen Polynom dritten oder vierten Grades. Als Integrationsbereich nehmen wir das reelle Intervall $[a,x] \subset \mathbb{R}$ und nehmen an, dass P dort nur positive Werte annimmt. Dann können wir eine reelle Quadratwurzel wie üblich definieren. Es folgt, dass $F(x)$ im Definitionsbereich monoton wächst und somit eine Umkehrfunktion G hat. Wir finden dann, dass diese die Differentialgleichung

$$(G')^2 = \frac{1}{(F')^2} = P(G)$$

löst. Sicherheitshalber nehmen wir an, dass G streng monoton wachsend ist, damit uns Nullstellen von P keine Probleme bereiten.

Das Integrationsproblem führt uns also auf einen gewissen Typ von Differentialgleichungen. Deren Behandlung ist das sogenannte Jacobische Problem. Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von drei Formulierungen dieses Problems.

Satz 2.4.2.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Jede vierpunktige Menge $M \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist der Verzweigungsort einer elliptischen Funktion vom Grad zwei.*
2. *Für jedes Polynom $P(w)$ dritten oder vierten Grades mit* einfachen *Nullstellen besitzt die Differentialgleichung*
$$(w')^2 = \ P(w)$$
eine elliptische Funktion vom Grad 2 als Lösung.
3. *Jede Differentialgleichung der Form*
$$(w')^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3$$
mit $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ besitzt eine $\wp$-Funktion eines Gitters als Lösung.

Beweis.
der Äquivalenzen.

1. $\Rightarrow$ 2. Sei P ein Polynom dritter oder vierter Ordnung mit nur einfachen Nullstellen. Sei M die Nullstellenmenge von P; ist der Grad von P gleich drei, nehmen wir zu M noch ∞ hinzu und erhalten eine vierelementige Menge. Sei nun f gemäß unserer Annahme eine elliptische Funktion mit Verzweigungsort M. Nach Satz 2.2.9 gilt dann
$$(f')^2 = a^2 P(f)$$
mit einem $a \in \mathbb{C}^*$. Dann ist die elliptische Funktion $f(\frac{z}{a})$ die gesuchte Lösung der Differentialgleichung.

2. $\Rightarrow$ 3. Wegen $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ hat das Polynom $P(w) = 4w^3 - g_2 w - g_3$ drei einfache Nullstellen. Denn schreibt man
$$P(w) = \ 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3) \ ,$$
so folgt leicht durch Koeffizientenvergleich
$$g_2^3 - 27g_3^2 = \ 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2 \ .$$
Nach Annahme gibt es eine elliptische Funktion f zweiten Grades, die die Differentialgleichung
$$(f')^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$$
löst. Ist a ein Pol von f der Ordnung $\omega < 0$, so ist a ein Pol von f' der Ordnung $\omega - 1$. Wegen der Differentialgleichung ist dann $2(\omega - 1) = 3\omega$, also $\omega = -2$. Die Funktion $\tilde{f}(z) := f(z - a)$ erfüllt die gleiche Differentialgleichung,
$$(\tilde{f}')^2 = 4\tilde{f}^3 - g_2\tilde{f} - g_3 \ ,$$

hat aber das Gitter L als Polstellenmenge. Daher ist $\tilde{f} - \wp =: b$ konstant. Die $\wp$-Funktion erfüllt also wegen der Differentialgleichung an $\tilde{f}$ die Differentialgleichung

$$(\wp')^2 = 4(\wp + b)^3 - g_2(\wp + b) - g_3$$

Der Vergleich mit der algebraischen Differentialgleichung an $\wp$ aus Theorem 2.2.15 zeigt, dass $b = 0$ gilt und die Konstanten die Eisensteininvarianten des Gitters sind.

3. $\Rightarrow$ 1. Sei M eine vierpunktige Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$. Wir wissen schon, dass es eine Möbius-Transformation $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ gibt, die einen Punkt dieser Menge auf $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ abbildet. Seien w_1, w_2 und w_3 die Bilder der anderen Elemente von M unter dieser Möbius-Transformation. Die linearen Möbius-Transformationen $z \mapsto az + b$ mit $a \neq 0$ lassen den Punkt ∞ fest. Wir finden Lösungen a, b von $0 = a(w_1 + w_2 + w_3) + 3b$ mit $a \neq 0$. Die zugehörige Möbiustransformation bildet w_1, w_2, w_3 auf Punkte e_1, e_2, e_3 mit $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ab.

   Wir können also annehmen, dass es eine Möbiustransformation

$$\begin{array}{rcl} f : \hat{\mathbb{C}} & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

   mit $ad - bc = 1$ gibt, die die eine Menge $M^* = \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ mit $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ auf M abbildet. Für die Koeffizienten des Polynoms

$$4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3) = 4w^3 - g_2 w - g_3$$

   gilt $g_2^3 \neq 27g_3^2$, weil alle seine Nullstellen verschieden sind. Nach Annahme gibt es eine $\wp$-Funktion zu dieser Differentialgleichung, die dann M^* als Verzweigungsort hat.

   Dann ist auch die Funktion $g(z) := f(\wp(z))$ eine elliptische Funktion mit Verzweigungsort $f(M^*)$.

□

Wir werden später in Satz 3.1.8 zeigen, dass für jedes Paar komplexer Werte (g_2, g_3) mit $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ eine elliptische Kurve mit Eisenstein-Invarianten g_2, g_3 existiert. Nach Theorem 2.2.15 ist dann die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion für das zugehörige Gitter eine Lösung der Differentialgleichung in der dritten Aussage. Damit sind dann alle Aussagen in Satz 2.4.2 bewiesen.

Insbesondere gilt:

Theorem 2.4.3.
Zu jedem Polynom $P(t)$ dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstelle existiert eine nicht-konstante elliptische Funktion f mit der Eigenschaft:
ist $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, auf der f umkehrbar ist, etwa eine kleine offene Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{C}$ mit $f(a) \neq \infty$ und $f'(a) \neq 0$. Sei

$$g : f(D) \to \mathbb{C}$$

die Umkehrfunktion. Dann ist g eine Stammfunktion des Integranden $\frac{1}{\sqrt{P(z)}}$, also

$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt{P(z)}} .$$

Beweis.
Wegen der Äquivalenz 2 $\Leftrightarrow$ 3 in Satz 2.4.2 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$P(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$$

gilt, mit $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion zum Gitter mit Eisenstein-Invarianten (g_2, g_3) hat dann die gewünschte Eigenschaft. Für eine lokale Umkehrfunktion g von $\wp$ folgt nämlich

$$g'(t)^2 = \frac{1}{\wp'(g(t))^2} = \frac{1}{4\wp^3(g(t)) - g_2\wp(g(t)) - g_3} = \frac{1}{P(t)}$$

$\square$

Wir wollen noch einmal das motivierende Beispiel betrachten und nehmen an, dass $P(t)$ ein *reelles* Polynom dritten oder vierten Grades ist, das keine mehrfachen komplexen Nullstellen hat. Sein höchster Koeffizient sei positiv. Dann ist $P(x) > 0$ für hinreichend großes x, etwa $x > x_0$. Für $x > x_0$ können wir die positive Wurzel betrachten, $\sqrt{P(x)} > 0$, und das Integral

$$E(x) \;=\; -\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}$$

für $x > x_0$ studieren. Dieses Integral konvergiert absolut, wie der Vergleich mit

$$\int_1^\infty t^{-s}\mathrm{d}t$$

mit $s > 1$ zeigt. Da der Integrand positiv ist, ist die Funktion $E(x)$ monoton wachsend. Daher ist auf einem geeigneten reellen Intervall die Umkehrfunktion von $E(x)$ definiert. Es folgt

Theorem 2.4.4.
Die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals

$$E(x) = -\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}$$

mit $P(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$ *und* $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ *ist in die komplexe Ebene fortsetzbar und ergibt dort eine elliptische Funktion, die Weierstraß'sche* $\wp$*-Funktion zum Gitter* L *mit Eisenstein-Invarianten* (g_2, g_3)*. Mit anderen Worten:*

$$-\int_{\wp(u)}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}} = u\ .$$

Es ist eine wichtige Einsicht von Bernhard Riemann, dass die Probleme mit dem Definitionsbereich sich klären, wenn man für das Integrationsgebiet zu der elliptischen Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ übergeht. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{X}(g_2, g_3) \;\to P^2\mathbb{C}$$

die einem Punkt $(y, x$ mit $y^2 = x^3 - g_2 - g_3$ den Punkt $x \in \mathbb{C}$ und dem Punkt $[0, 0, 1]$ auf der elliptischen Kurve den Punkt $\infty \in P^1\mathbb{C}$ zuordnet.

Dann hat jeder Punkt von $P^1\mathbb{C}$ zwei Urbilder, mit Multiplizität gezählt. Diese sind genau dann verschieden, wenn x keine Nullstelle des Polynoms $x^3 - g_2 - g_3$ ist, also wenn x kein Halbwert oder ∞ ist. Man stellt sich die Situation so vor, dass über der projektiven Geraden mit Koordinate x zwei geschlitzte projektive Ebenen mit Koordinate y so verklebt werden, dass ein Torus entsteht. Die Integrale sollten sinnvollerweise auf dem Torus diskutiert werden.

2.5 Das Abelsche Theorem

Wir wollen nun noch explizit elliptische Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen und Polstellen konstruieren.

Wir erinnern an rationale Funktionen, also an meromorphe Funktionen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Definition 2.5.1

1. *Eine Funktion*
$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$
heißt meromorph, wenn ihre Einschränkung auf $\mathbb{C}$ meromorph ist und die Funktion
$$\hat{f}(z) := f(1/z)$$
auf der offenen Menge
$$\hat{D} := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid 1/z \in \mathbb{C}\}$$
meromorph ist.

2. *Man sagt dann, die Funktion f habe bei ∞ eine hebbare Singularität bzw. einen Pol der Ordnung k bzw. eine wesentliche Singularität, wenn die Funktion $\hat{f}$ die entsprechende Eigenschaft an der Stelle $z = 0$ besitzt.*

Beispiele 2.5.2.

1. *Die Funktion $z \mapsto (z - a)$ hat in a eine Nullstelle. Es ist $\hat{f}(z) = \frac{1}{z} - a$, daher hat die Funktion f in ∞ einen Pol erster Ordnung.*

2. *Allgemeiner hat die rationale Funktion*
$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{\nu_1} \dots (z-a_n)^{\nu_n}}{(z-b_1)^{\mu_1} \dots (z-b_m)^{\mu_m}}$$
als Nullstellen in $\mathbb{C}$ die Punkte $a_1, \dots a_n$, die gegebenenfalls bei mehrfachen Nullstellen mehrfach auftreten können und die Polstellen $b_1, \dots b_m$, ebenfalls mit Vielfachheiten. Es gilt
$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \frac{(1/z-a_1)^{\nu_1} \dots (1/z-a_n)^{\nu_n}}{(1/z-b_1)^{\mu_1} \dots (1/z-b_m)^{\mu_m}} \\ &= z^{-\sum_{i=1}^n \nu_i + \sum_{i=1}^m \mu_i} \cdot \frac{(1-a_1/z)^{\nu_1} \dots (1-a_n/z)^{\nu_n}}{(1-b_1/z)^{\mu_1} \dots (1-b_m/z)^{\mu_m}} \end{aligned}$$
so dass f bei ∞ Ordnung $-\sum_{i=1}^n \nu_i + \sum_{i=1}^m \mu_i$ hat. Zählt man alles zusammen, so hat eine rationale Funktion auf $\hat{\mathbb{C}}$ gleich viele Null- und Polstellen, wenn man die Vielfachheiten berücksichtigt.

3. *Umgekehrt kann man für vorgeschriebene singuläre Stellen eine rationale Funktion konstruieren: sei $M \subset \hat{\mathbb{C}}$ endlich. Jedem $a \in M$ sei eine ganze Zahl ν_a zugeordnet, wobei*
$$\sum_{a \in M} \nu_a = 0$$
gelte. Dann hat die rationale Funktion
$$f(z) = \prod_{a \in M \setminus \{\infty\}} (z-a)^{\nu_a}$$
das richtige Verhalten, einschließlich der Polstellenordnung $\sum \nu_a$ bei $z = \infty$.

Wir wollen nun für elliptische Funktionen konstruieren:

Theorem 2.5.3 (Abelsches Theorem).
Eine elliptische Funktion zu vorgegebenen Nullstellen $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}/L$ (die entsprechend ihrer Vielfachheit auch mehrfach auftreten können) und Polstellen $b_1, \dots b_m \in \mathbb{C}/L$ existiert genau dann, wenn $m = n$ gilt und die Abelsche Relation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_i \bmod L$$

erfüllt ist.

Wir wissen schon aus Theorem 2.1.9, dass die Bedingungen notwendig sind. Zur Konstruktion brauchen wir

Lemma 2.5.4.
Es existiert zu jedem gegebenen Gitter $L \subset \mathbb{C}$ eine analytische *Funktion*

$$\sigma: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

die modulo L nur eine Nullstelle z_0 erster Ordnung hat und für die

$$\sigma(z+\omega) \ = \ \mathrm{e}^{a_\omega z + b_\omega} \sigma(z) \quad \textit{für alle} \quad \omega \in L$$

gilt, mit komplexen Zahlen a_ω, b_ω, die nur vom Gittervektor $\omega \in L$ abhängen.

Beweis.
von Theorem 2.5.3. Nachdem wir gegebenenfalls eine Stelle um einen Gittervektor verschieben, nehmen wir exakte Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

in $\mathbb{C}$ an. Die Funktion

$$f(z) := \frac{\prod_{j=1}^{n} \sigma(z + z_0 - a_j)}{\prod_{j=1}^{n} \sigma(z + z_0 - b_j)}$$

mit σ aus Lemma 2.5.4 hat das gewünschte Null- und Polstellenverhalten. Ferner gilt für jedes $\omega \in L$

$$f(z+\omega) \ = \frac{\prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{a_\omega(z+z_0-a_j)+b_\omega}}{\prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{a_\omega(z+z_0-b_j)+b_\omega}} f(z) \ ,$$

was wegen der Bedingung an die Gleichheit von Null- und Polstellensumme verschwindet. Also ist die Funktion f auch elliptisch. □

Wir müssen also eine Funktion σ mit den in Lemma 2.5.4 beschriebenen Eigenschaften konstruieren. Wir setzen dafür für ein Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

$$\tau := \pm \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

und richten das Vorzeichen so ein, dass τ in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ liegt, wenn D positiv ist.

Ist $f(z)$ eine elliptische Funktion zum Gitter L, so ist $g(z) := f(\omega_1 z)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Wir ziehen uns also auf den Fall zurück, dass $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \tau \in \mathbb{H}$ gilt.

Definition 2.5.5
Für jedes feste $\tau \in \mathbb{H}$ betrachten wir die *Thetareihe*

$$\vartheta(\tau, z) \ := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(n^2\tau + 2nz)}$$

Diese konvergiert normal auf ganz $\mathbb{C}$.

Beweis.
Sei

$$\tau = \ u + \mathrm{i}v \qquad \text{mit } v > 0 \text{ und } z = x + \mathrm{i}y$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left| \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(n^2\tau + 2nz)} \right| = \mathrm{e}^{-\pi(n^2 v + 2ny)}$$

Für z in einem vorgegebenen Kompaktum ist y beschränkt. Dann ist für fast alle n

$$n^2 v + 2ny \geq \frac{1}{2} n^2 v \ .$$

Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} v})^{n^2}$$

hat für $n \geq 0$ bzw. $n \leq 0$ konvergente Teilreihen, wie der Vergleich mit der geometrischen Reihe zeigt. □

Wir konzentrieren uns hier erst einmal auf die Abhängigkeit von ϑ von $z \in \mathbb{C}$ bei festem $\tau \in \mathbb{H}$:

Lemma 2.5.6.
Es gilt

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau, z+1) &= \vartheta(\tau, z) \\ \vartheta(\tau, z+\tau) &= \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\tau + 2z)} \vartheta(\tau, z) \end{aligned}$$

Es folgt induktiv, dass es für jeden Gittervektor $\omega \in L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ komplexe Konstanten a_ω, b_ω gibt mit $\theta(z + \omega) \ = \ \mathrm{e}^{a_\omega z + b_\omega} \theta(z)$, wie in Lemma 2.5.2 gefordert.

Beweis.
Es handelt sich um eine direkte Rechnung. Die erste Gleichheit folgt aus

$$\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\tau + 2(z+1))} = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\tau + 2z)} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n} = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\tau + 2z)} \ .$$

Für die zweite Gleichheit rechnen wir mit einer quadratischen Ergänzung

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau, z+\tau) &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(n^2\tau + 2n\tau + 2nz)} \\ &= \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}\tau} \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}((n+1)^2\tau + 2nz)} \\ &= \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(\tau + 2z)} \vartheta(\tau, z) \end{aligned}$$

□

Wir müssen noch die Nullstellen der ϑ-Funktion kontrollieren.

Lemma 2.5.7.
Die ϑ-Funktion hat modulo $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ die einzige Nullstelle

$$\vartheta(\tau, \frac{1+\tau}{2}) \ = 0 \ .$$

Beweis.
Dazu rechnen wir mit der Substitution $n = -(m+1)$

$$\vartheta(\tau, \frac{1+\tau}{2}) \ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n(n+1)\tau} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^{-m-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(-m-1)(-m)\tau} = \ -\vartheta(\tau, \frac{1+\tau}{2}) \ ,$$

so dass wirklich eine Nullstelle vorliegt.

Um zu zeigen, dass nur eine Nullstelle vorliegt, betrachten wir wieder das Pol- und Nullstellen zählende Integral über den Rand einer Grundmasche $\mathcal{F}$ des Gitters $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\mathcal{F}} \frac{\vartheta'(\tau,\zeta)}{\vartheta(\tau,\zeta)} \mathrm{d}\zeta \, .$$

Da der Integrand nach Lemma 2.5.6 Periode 1 hat, heben sich die Beiträge über die linke und rechte Kante des Randes von $\mathcal{F}$ weg. Für

$$g(z) \ = \ \frac{\vartheta'(\tau,z)}{\vartheta(\tau,z)}$$

gilt wiederum mit Lemma 2.5.6

$$g(z+\tau) \ - g(z) \ = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(t+2z)}]\vartheta(\tau,z)}{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(t+2z)}\vartheta(\tau,z)} - \frac{\vartheta'(\tau,z)}{\vartheta(\tau,z)} = -2\pi\mathrm{i}$$

und somit

$$\int_a^{a+1} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{a+1+\tau}^{a+\tau} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_a^{a+1} [g(\zeta) - g(\zeta+\tau)]\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\mathcal{F}} \frac{\vartheta'(\tau,\zeta)}{\vartheta(\tau,\zeta)} \mathrm{d}\zeta = 1 \ \ ,$$

so dass wegen der Analytizität von ϑ nur eine Nullstelle vorliegen kann □

Wir erwähnen noch den Bezug der ϑ-Funktion zur Weierstraß'schen $\wp$-Funktion: die sogenannte Weierstraß'sche σ-Funktion des Gitters $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$

$$\sigma(z) \ = \mathrm{e}^{z^2} \frac{\vartheta_1(\tau,z)}{\vartheta_1(\tau,0)}$$

mit der verschobenen ϑ-Funktion

$$\vartheta_1(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n^2\tau + 2\pi\mathrm{i}nz + \pi\mathrm{i}n}$$

ist eine ungerade ganze Funktion, die genau an den Gitterpunkten von L Nullstellen erster Ordnung hat. Es gilt dann für die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion des Gitters $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$

$$\wp = \ - \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' \ .$$

Der Quotient $\frac{\sigma'}{\sigma}$ heißt auch Weierstraß'sche ζ-Funktion.

3 Modulformen

Wir wollen jetzt kein festes Gitter mehr betrachten, sondern den Raum der Äquivalenzklassen aller Gitter.

3.1 Die elliptische Modulgruppe

Definition 3.1.1
Zwei Gitter $L, L' \subset \mathbb{C}$ heißen äquivalent , wenn sie durch eine Drehstreckung der komplexen Ebene in einander überführt werden, d.h. wenn es ein $a \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $L' = aL$.

Bemerkungen 3.1.2.

1. *Wir haben Bijektionen zwischen den zugehörigen elliptischen Funktionenkörpern,*
$$\begin{array}{rcl} K(L) & \to & K(L') \\ f(z) & \mapsto & g(z) := f(\frac{z}{a}) \end{array}$$

2. *Wir werden später sehen, dass zwei elliptische Kurven $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ genau dann isomorphe komplexe Mannigfaltigkeiten sind, wenn die Gitter L, L' äquivalent sind.*

3. *Jedes Gitter ist äquivalent zu einem Gitter der Form*
$$L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{H}\,.$$

4. *Zwei Gitter $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ und $L' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ dieser Form sind äquivalent, wenn es ein $a \in \mathbb{C}^*$ gibt mit*
$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau' = a(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$$
Dann muss es ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ geben, so dass gilt
$$\begin{array}{rcl} \tau' & = & a(\alpha\tau + \beta) \\ 1 & = & a(\gamma\tau + \delta) \end{array}$$
Es gilt also
$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\,.$$
Die beiden Werte von τ hängen also durch eine spezielle Möbius-Transformation zusammen.

Sei $D := \alpha\delta - \beta\gamma$ die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, die diese Möbiustransformation darstellt. Man rechnet direkt nach, dass
$$\operatorname{Im}\tau' = \frac{D \cdot \operatorname{Im}\tau}{|\gamma\tau + \delta|^2}$$
gilt, so dass $D > 0$ gelten muss, damit auch das Bild τ' unter der Möbiustransformation in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ liegt. Wir finden somit

Satz 3.1.3.
Die Gruppe $\mathrm{GL}_+(2,\mathbb{R})$ *der reellen Matrizen mit positiver Determinante operiert auf der oberen Halbebene durch*

$$\tau \mapsto \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

mittels konformer Selbstabbildungen. Zwei Matrizen definieren genau dann dieselbe Abbildung, wenn sie sich um einen skalaren Faktor unterscheiden.

Da die obere Halbebene $\mathbb{H}$ durch die Abbildung

$$\tau \mapsto \frac{\tau-\mathrm{i}}{\tau+\mathrm{i}}$$

auf die Einheitskreisscheibe konform abgebildet werden kann, deren konforme Selbstabbildungen bekannt sind, folgt, dass wir alle konformen Selbstabbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ beschrieben haben.

Wir untersuchen weiter die Äquivalenz zweier Gitter der Form $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}+\tau'\mathbb{Z}$, d.h. die Frage nach der Existenz von $a\in\mathbb{C}^*$ mit

$$\mathbb{Z}\ +\mathbb{Z}\tau' = \ a(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$$

von Gittern. Sie ist äquivalent zu der Existenz von Matrizen $M,N\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix}\tau'\\1\end{pmatrix} = aM\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}\tau'\\1\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix} = N\cdot M\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix}$$

Da 1 und τ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, folgt, dass N und M Inverse sind. Beide Matrizen haben ganzzahlige Einträge, also ganzzahlige Determinante. Für die Determinanten gilt $\det M\cdot\det N=1$, also $\det M=\pm1$. Wir haben bereits gesehen, dass die Determinante $\det M$ positiv sein muss, damit τ' wieder in der oberen Halbebene liegt.

Definition 3.1.4
Die elliptische Modulgruppe $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ *ist die Gruppe aller* 2×2*-Matrizen mit ganzen Einträgen und Determinante* 1.

Man manchmal wird als elliptische Modulgruppe allerdings auch die Quotientengruppe bezeichnet, bei der zwei Matrizen $\pm A$ identifiziert sind, da solche Matrizen gleich auf der oberen Halbebene wirken. Wir haben gesehen:

Satz 3.1.5.
Zwei Gitter der Form

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \quad \textit{und} \quad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$$

mit $\tau,\tau'\in\mathbb{H}$ *sind genau dann äquivalent, wenn eine Matrix* $M\in\Gamma$ *mit* $\tau'=M\tau$ *existiert. Die Äquivalenzklassen von Gittern entsprechen also bijektiv den Bahnen* $[\tau]$ *von Punkten der oberen Halbebene* $\mathbb{H}$ *unter der Wirkung von* Γ.

Betrachtung 3.1.6.
Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass für jedes Paar komplexer Zahlen (g_2,g_3) *mit* $g_2^3-27g_3^2\neq 0$ *ein Gitter L existiert, dessen Weierstraß-Invarianten durch diese Zahlen gegeben sind:*

$$g_2 = g_2(L) = \ 60G_4(L) = \ 60\sum_{\omega\in L'}\omega^{-4}$$

und

$$g_3 = g_3(L) = \ 140G_6(L) = 140 \sum_{\omega \in L'} \omega^{-6} \ .$$

Allgemein gilt für die Eisensteinreihe

$$G_n(L) = \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^n}$$

für $a \in \mathbb{C}^*$

$$G_n(aL) = \ a^{-n} G_n(L)$$

und somit für die Diskriminante $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$

$$\Delta(aL) = \ a^{-12}\Delta(L) \quad .$$

Wir definieren daher:

Definition 3.1.7
Die komplexe Zahl

$$j(L) := \ \frac{g_2^3(L)}{g_2^3(L) - 27g_3^2(L)}$$

heißt absolute Invariante des Gitters L. Sie hängt nur von der Äquivalenzklasse des Gitters ab.

Der folgende Satz führt die Frage nach der Existenz von Gittern zu vorgebenen (g_2, g_3) auf die Frage nach dem Bild der absoluten Invariante zurück:

Satz 3.1.8.
Angenommen, es gebe für jedes $j \in \mathbb{C}$ ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ mit $j(L) = j$. Dann kann man ein Gitter für jedes Paar (g_2, g_3) mit nicht-verschwindender Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ finden.

Wir werden später in Theorem 3.4.10sehen, dass die j-Funktion $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ jeden Wert annimmt, der Wert von j die Äquivalenzklasse des Gitters eindeutig bestimmt, und dass die Werte von g_2, g_3 die Gitter eindeutig bestimmen.

Beweis.
Seien (g_2, g_3) vorgeben; berechne daraus $\Delta(g_2, g_3)$ und $j(g_2, g_3)$. Finde ein Gitter L mit $j(L) = j$. Für $a \in \mathbb{C}^*$ betrachte

$$\Delta(aL) \ = a^{-12}\Delta(L)$$

Wir können a so wählen, dass $\Delta(aL) = \Delta(g_2, g_3)$ gilt, denn wir finden eine zwölfte Wurzel, die die Gleichung

$$a^{12} = \Delta(L)/\Delta(g_2, g_3)$$

löst. Beachte, dass a hierdurch nur bis auf Multiplikation mit einer zwölften Einheitswurzel bestimmt ist. Für ein solches a finden wir dann

$$g_2(aL)^3 = g_2^3 \quad \text{und} \quad g_3^2(aL) = \ g_3^2 \ .$$

Ersetzt man L durch iL, so ändert sich $g_2(L)$ nicht, aber $g_3(L)$ wechselt das Vorzeichen. Wir können a also einrichten, dass

$$g_2(aL)^3 = g_2^3 \quad \text{und} \quad g_3(aL) = \ g_3 \quad \text{gilt.}$$

Ähnlich verändert die Multiplikation mit einer sechsten Einheitswurzel ζ den Wert $g_3(L)$ nicht, aber $g_2(\zeta\, L) = \zeta^{-4} g_3(L)$, so dass wir das Gitter mit einer dritten Einheitswurzel multiplizieren können und so die vorgegebenen Werte von g_2, g_3 einrichten können. $\square$

Wir führen daher die folgenden Funktionen auf der oberen Halbebene ein:

Definition 3.1.9
Sei $\tau \in \mathbb{H}$. Die Eisensteinfunktion ist für $k \geq 4$

$$G_k(\tau) := G_k(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},(c,d)\neq(0,0)} (c\tau + d)^{-k} \ .$$

Analog setzen wir

$$g_2(\tau) := 60 G_4(\tau) \qquad \textit{und} \qquad g_3(\tau) := 140 G_6(\tau)$$

sowie

$$\Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27 g_3^2(\tau) \qquad \textit{und} \qquad j(\tau) := \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}$$

Es folgt aus $j(aL) = j(L)$ die Invarianz

$$j\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = j(\tau) \qquad \text{für alle} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma \ .$$

3.2 Die Modulfunktion j

Wir wollen die Surjektivität der Modulfunktion $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ beweisen. Dazu müssen wir erst einmal wissen, dass die Eisensteinreihen analytische Funktionen auf $\mathbb{H}$ sind. Wir schließen dies aus der folgenden Abschätzung:

Lemma 3.2.1.
Seien $C, \delta > 0$ reelle Zahlen. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit

$$|\mathrm{Re}\,\tau| \leq C \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Im}\,\tau \geq \delta$$

gilt

$$|c\tau + d| \geq \epsilon |c\mathrm{i} + d| = \epsilon\sqrt{c^2 + d^2} \qquad \textit{für alle} \qquad c, d \in \mathbb{R} \ .$$

Beweis.
Wir können $(c, d) \neq (0, 0)$ annehmen, da andernfalls die Ungleichung für jedes $\epsilon > 0$ erfüllt ist. Gilt die Abschätzung für gewisse (c, d), dann auch für (tc, td) für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir können uns daher auf den Fall zurückziehen, wenn $c^2 + d^2 = 1$ gilt, und müssen dann für diese (c, d) zeigen, dass $\epsilon > 0$ existiert mit

$$|c\tau + d| \geq \epsilon \ .$$

Wegen

$$|c\tau + d|^2 = (c\mathrm{Re}\,\tau + d)^2 + (c\mathrm{Im}\,\tau)^2$$

folgt

$$|c\tau + d| \geq |c\tilde{\tau} + d|$$

mit $\tilde{\tau} := \mathrm{Re}\,\tau + \mathrm{i}\delta$. Die Funktion

$$f(c, d, u) := |c(u + \mathrm{i}\delta) + d|$$

ist strikt positiv und nimmt daher auf dem Kompaktum $c^2 + d^2 = 1$ und $|u| \leq C$ im $\mathbb{R}^3$ ein strikt positives Minimum an. $\square$

Daraus folgt, dass die Eisensteinreihe auf den beschriebenen Gebieten gleichmäßig konvergiert, also eine analytische Funktion darstellt.

Satz 3.2.2.
Die Eisensteinreihe vom Gewicht $k \geq 3$

$$G_k(\tau) = \sum{}' \, (c\tau + d)^{-k}$$

definiert eine analytische Funktion auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Insbesondere sind die Funktionen

$$\begin{array}{ll} g_2(\tau) = 60 G_4(\tau) & g_3(\tau) = 140 G_6(\tau) \\ \Delta(\tau) \ = g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2 & j(\tau) \ = g_2^3(\tau)/\Delta(\tau) \end{array}$$

analytisch auf $\mathbb{H}$.

Wir untersuchen das Verhalten der Eisensteinreihen unter der Wirkung der elliptischen Modulgruppe Γ.

Satz 3.2.3.
Es gilt

$$G_k\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = \ (\gamma\tau + \delta)^k G_k(\tau) \qquad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma \ .$$

Beweis.
Eine direkte Rechnung zeigt

$$c\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} + d = \frac{c'\tau + d'}{\gamma\tau + \delta}$$

mit

$$c' = \alpha c + \gamma d \quad \text{ und } \quad d' = \beta c + \delta d$$

also

$$\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \ .$$

Die Matrix hat Determinante Eins uns ist invertibel; mit (c, d) laufen auch (c', d') über alle ganzzahligen Paare ungleich Null. Daher gilt

$$\begin{array}{rcl} G_k(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}) & = & \sum'_{c,d} (c\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} + d)^{-k} \\ & = & \sum'_{c',d'} (c'\tau + d')^{-k} (\gamma\tau + \delta)^k \\ & = & (\gamma\tau + \delta)^k G_k(\tau) \ . \end{array}$$

$\square$

Die Eisensteinreihen sind also insbesondere periodisch mit Periode 1,

$$G_k(\tau + 1) \ = G_k(\tau) \quad .$$

Die Substitution $(c, d) \ \to (-c, -d)$ zeigt

$$G(\tau) \ = \ (-1)^k G(\tau) \ ,$$

so dass die Eisensteinreihen für ungerades k verschwinden.

Satz 3.2.4.
Es gilt für gerades $k \geq 4$:

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} G_k(\tau) = 2\zeta(k) \equiv 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} \ .$$

Hierbei haben wir der Kürze halber die Riemannsche ζ-Funktion mit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ eingeführt.

Beweis.
Wegen der Periodizität der Eisensteinrihe $G_k(\tau)$ können wir uns auf den Bereich mit $|\mathrm{Re}\,\tau| \leq 1/2$ und $\mathrm{Im}\,\tau \geq 1$ beschränken. Da hier nach Satz 3.2.2 die Eisensteinreihe gleichmäßig konvergiert, kann man den Grenzübergang für die Summe gliedweise durchführen. Offenbar gilt

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} (c\tau + d)^{-1} = 0 \quad \text{für} \quad c \neq 0$$

und daher

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} G_k(\tau) \ = \ \sum_{d\neq 0} d^{-k} = 2\sum_{d=1}^{\infty} d^{-k} = 2\zeta(k) \ .$$

□

Korollar 3.2.5.

1. *Es gilt*

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} \Delta(\tau) \ = 0$$

2. *Die j-Funktion ist eine analytische Funktion in der oberen Halbebene. Sie ist invariant unter der elliptischen Modulgruppe:*

$$j(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}) = j(\tau) \qquad \textit{für} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$$

und es gilt

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} j(\tau) = \infty \ .$$

Beweis.
Es reicht, die erste Behauptung zu zeigen, die zweite folgt dann mit der Beziehung $j(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}$ sofort. Dafür verweisen wir darauf, dass die Werte der ζ-Funktion für gerade natürliche Zahlen mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden können, vgl. Freitag-Busam III.7.14. Es gilt

$$\begin{aligned} \zeta(4) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90} \\ \zeta(6) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6} = \frac{\pi^6}{945} \ , \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} \Delta(\tau) = [60 \cdot 2\zeta(4)]^3 - 27[140 \cdot 2\zeta(6)]^2 = 0 \ .$$

□

Wir wollen nun einen Fundamentalbereich für die Wirkung der Modulgruppe Γ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ finden.

Satz 3.2.6.
Zu jedem Punkt τ in der oberen Halbebene existiert eine Modulsubstitution $M \in \Gamma$, so dass $M\tau$ in der sogenannten <u>*Modulfigur*</u> *oder auch dem* <u>*Fundamentalbereich der Modulgruppe*</u>

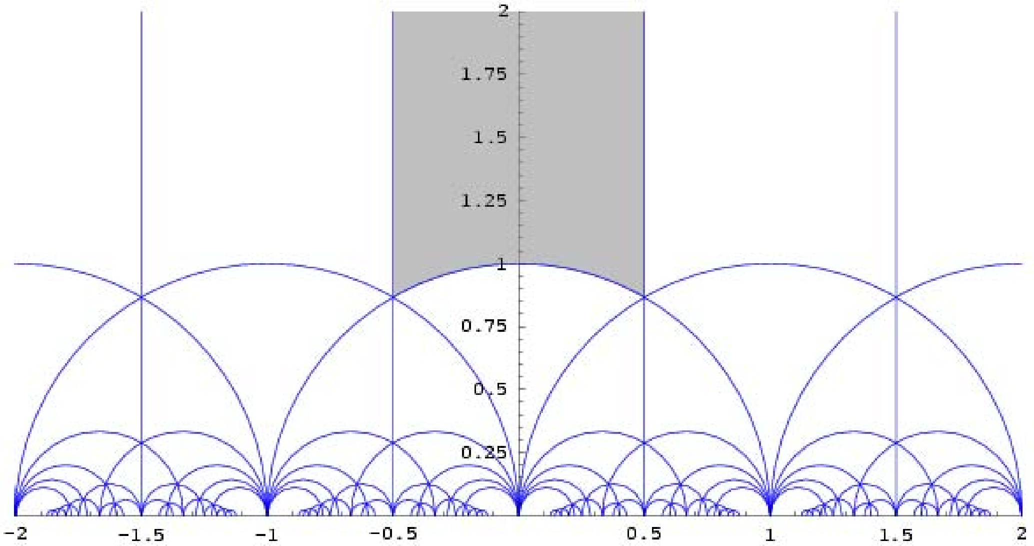
$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, |\mathrm{Re}\,\tau| \leq 1/2\}$$

enthalten ist. Man kann erreichen, dass diese Modulsubstitution M in der von den beiden Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untergruppe von Γ enthalten ist.

Wir werden später sehen, dass die beiden Matrizen sogar Γ erzeugen. Wir veranschaulichen die Situation im folgenden Bild, in dem die Modulfigur schraffiert ist:



Beweis.
Wir erinnern an die Formel nach Bemerkung 3.1.2

$$\mathrm{Im}\, M\tau = \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{|c\tau + d|^2} \ ,$$

wobei $M \in \Gamma$ beliebig ist. Sei Γ' die von S und T erzeugte Untergruppe von Γ. Wenn wir nun eine Folge (c_n, d_n) mit paarweise verschiedenen Gliedern betrachten, so gilt notwendigerweise

$$|c_n\tau + d_n| \to \infty \ .$$

Es existiert also eine Matrix $M_0 \in \Gamma'$, so dass

$$\mathrm{Im}\, M_0\tau \geq \mathrm{Im}\, M\tau \qquad \text{für alle } M \in \Gamma'$$

gilt. Setze $\tau_0 := M_0\tau$. Der Imaginärteil ändert sich nicht, wenn wir τ_0 durch

$$\tau_0 + n = \ [\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_0]\tau$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ ersetzen. Das Element $[\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_0]$ liegt dann immer noch in Γ'. Dadurch können wir $|\mathrm{Re}\,\tau_0| \leq 1/2$ einrichten.

Da das Maximum für M_0 angenommen wird, haben wir speziell die Ungleichung

$$\mathrm{Im}\, M_0\tau \geq \mathrm{Im}\,[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M_0]\tau$$

und erhalten mit $\tau_0 = M_0\tau$

$$\mathrm{Im}\, \tau_0 \geq \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_0 = \frac{\mathrm{Im}\, \tau_0}{|\tau_0|^2} ,$$

woraus $|\tau_0| \geq 1$ folgt. Wir haben im Beweis nur Potenzen von T und das Element $S \in \Gamma'$ benützt. □

Theorem 3.2.7.
Die j-Funktion nimmt jeden Wert auf $\mathbb{C}$ an.

Damit ist insbesondere nach Satz 3.1.8 klar, dass es für jedes Paar (g_2, g_3) komplexer Zahlen mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ ein Gitter $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ mit den entsprechenden Eisenstein-Invarianten gibt. Auch das Jacobische Problem aus Satz 2.4.2 ist somit gelöst. Wir werden später sogar sehen, dass die j-Funktion eine Bijektion $\mathbb{H}/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ liefert.

Beweis.
Nach dem Satz über die Gebietstreue sind nicht-konstante holomorphe Abbildungen offen, also ist $j(\mathbb{H})$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Es reicht also aus, zu zeigen, dass $j(\mathbb{H})$ auch abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist, da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist.

Betrachte eine Folge von Punkten in $j(\mathbb{H})$, die gegen einen Punkt $b \in \mathbb{C}$ konvergiert und finde τ_n in der Modulfigur $\mathcal{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} j(\tau_n) = b$.

Es existiert nun eine Konstante $C > 0$, so dass $\mathrm{Im}\, \tau_n \leq C$ für alle n. Denn andernfalls finde eine Teilfolge von (τ_n), deren Imaginärteile gegen ∞ gehen. Die j-Werte dieser Teilfolge sind nach Korollar 3.2.5.2 unbeschränkt, im Widerspruch zur angenommenen Konvergenz der Bildfolge.

Die Teilmenge $\{\tau \in \mathcal{F} \,|\, \mathrm{Im}\, \tau \leq C\}$ ist offenbar kompakt. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass die Folge (τ_n) konvergiert, $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau \in \mathcal{F} \subset \mathbb{H}$. Aus der Stetigkeit von j folgt $b = j(\tau) \in j(\mathbb{H})$. □

3.3 Die Modulgruppe und ihr Fundamentalbereich

Wir wollen die Geometrie der Modulfigur aus Satz 3.2.6 weiter untersuchen. Ab diesem Kapitel werden wir in der Notation für ein Element in der oberen Halbebene z statt τ verwenden.

Lemma 3.3.1.
Für beliebiges $\delta > 0$ betrachte den Bereich

$$\mathcal{F}(\delta) := \{z \in \mathbb{H} \,|\, |\mathrm{Re}\,(z)| \leq \delta^{-1}, \mathrm{Im}\,(z) \geq \delta\} .$$

Dann existieren nur endlich viele Elemente $M \in \Gamma$ mit der Eigenschaft

$$M\mathcal{F}(\delta) \cap \mathcal{F}(\delta) \neq \emptyset .$$

Beweis.
Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ein Element mit der gewünschten Eigenschaft. Gilt $c = 0$, so ist wegen der Determinantenbedingung $ad = 1$, also liegt eine Translation $z \mapsto z + \frac{b}{d}$ vor. Da die Realteile von z und Mz beschränkt sind, kommen nur endlich viele Translationen für M in Betracht. Wir können uns also auf den Fall $c \neq 0$ beschränken.

Sei $z \in M\mathcal{F}(\delta) \cap \mathcal{F}(\delta)$. Dann gilt

$$y := \operatorname{Im} z \geq \delta \quad \text{und} \quad \frac{y}{|cz+d|^2} = \operatorname{Im}(Mz) \geq \delta \ .$$

Daraus folgt mit $x := \operatorname{Re}(z)$

$$y \geq \delta(cx+d)^2 + \delta c^2 y^2 \geq \delta c^2 y^2$$

und damit

$$\frac{1}{\delta c^2} \geq y \geq \delta \ .$$

Hieraus folgt, dass nur endlich viele $c \in \mathbb{Z}$ auftreten können. Wegen der zweiten Ungleichung ist dann auch y beschränkt; aus der ersten Ungleichung folgt dann, dass auch d beschränkt ist und nur endlich viele d die Ungleichung erfüllen können. Erfüllt M die Bedingung, so auch M^{-1}. Somit können a, c, d für gegebenes $\delta > 0$ Werte nur in einer endlichen Menge annehmen. Die Determinantenbedingung $ad - bc = 1$ impliziert, dass auch b nur Werte einer endlichen Menge annehmen kann. □

Korollar 3.3.2.

1. *Zu je zwei Kompakta $K, \tilde{K} \subset \mathbb{H}$ existieren nur endlich viele $M \in \Gamma$ mit*

$$M(K) \cap \tilde{K} \neq \emptyset \ .$$

Denn es ist $K \cup \tilde{K}$ in $\mathcal{F}(\delta)$ für ein hinreichend kleines δ enthalten.

2. *Wählen wir speziell für $\tilde{K}$ eine einelementige Menge, so finden wir: Sei $p \in \mathbb{H}$ und K ein Kompaktum in $\mathbb{H}$. Dann existieren nur endlich viele Elemente $M \in \Gamma$ mit $Mp \in K$.*

3. *Insbesondere ist die Punktmenge $\{Mp\}_{M\in\Gamma}$, also die Bahn des Punktes p unter Γ, diskret in $\mathbb{H}$.*

4. *Der* Stabilisator

$$\Gamma_p = \{M \in \Gamma \mid Mp = p\}$$

ist für jeden Punkt $p \in \mathbb{H}$ eine endliche Gruppe

Man rechnet zum Beispiel leicht nach, dass der Stabilisator des Punktes $\rho := e^{\pi i/3} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ aus den sechs Matrizen

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

besteht.

Man zeigt dann:

Satz 3.3.3.
Sei $M \in \Gamma \setminus \{E\}$ eine Modulmatrix mit der Eigenschaft

$$R(M) := M\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset \ .$$

Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *und $R(M)$ ist die rechte Vertikalkante von $\mathcal{F}$.*
- $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *und $R(M)$ ist die linke Vertikalkante von $\mathcal{F}$.*
- $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *und $R(M)$ ist der Kreisbogen von $\mathcal{F}$. Das Element $M \in \Gamma$ wirft den Punkt* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ *auf dem Kreisbogen auf den Punkt* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi - \mathrm{i}\phi}$ *und hat den Fixpunkt* i.
- *In den restlichen Fällen besteht M aus nur einem Punkt, nämlich endweder $\rho = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}$ oder $\rho^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}$.*

Für den elementaren Beweis verweisen wir auf Freitag-Busam, VI.1.4.

Bemerkung 3.3.4.

1. *Zwei Punkte aus der Modulfigur $\mathcal{F}$ sind also genau dann äquivalent unter der Wirkung von Γ, wenn sie sich entweder auf den Vertikalkanten oder auf dem Kreisbogen gegenüber liegen.*
2. *Die inneren Punkte von $\mathcal{F}$ sind alle inäquivalent unter der Wirkung von Γ.*

Definition 3.3.5
Ein Punkt $p \in \mathbb{H}$ heißt <u>elliptischer Fixpunkt</u> *von Γ, wenn sein Stabilisator*

$$\Gamma_p := \ \{M \in \Gamma \mid Mp = p\}$$

ein Element ungleich $\pm E$ enthält. Die <u>Ordnung</u> *des Fixpunkts ist*

$$e(p) := \ \frac{1}{2}|\Gamma_p| \ .$$

Es gibt also genau zwei Γ-Äquivalenzklassen elliptischer Fixpunkte, repräsentiert durch i mit Ordnung $e(\mathrm{i}) = 2$ und ρ mit $e(\rho) = 3$.

Wir wollen noch die Modulgruppe Γ selbst untersuchen:

Satz 3.3.6.
Die elliptische Modulgruppe Γ wird von den beiden Matrizen

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt.

Beweis.
Sei $a \in \mathcal{F}$ ein beliebiger innerer Punkt. Sei $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Aus Satz 3.2.6 folgt, dass es eine Matrix N in der von S und T erzeugten Untergruppe gibt, so dass $NM(a) \in \mathcal{F}$ gilt. Da a ein innerer Punkt ist, folgt aus Bemerkung 3.3.4 die Gleichung $NM = \pm E$. Wegen $S^2 = -E$ ist $-E$ in der von S und T erzeugten Untergruppe enthalten, also folgt die Behauptung. $\square$

3.4 Die $k/12$-Formel und die Injektivität der j-Funktion

Betrachtung 3.4.1.
Betrachte für $C > 0$ die Teilmenge $U_C := \{z \in \mathbb{H} | \mathrm{Im}\, z > C\}$. Sei nun $f : U_C \to \mathbb{C}$ eine periodische Funktion, d.h. es gebe $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f(z+N) = f(z) \quad .$$

Es gibt dann eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z/N} \ ,$$

die nach der Substitution $q := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z/N}$ einer Laurententwicklung

$$g(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$$

auf einer punktierten Kreisscheibe um Null entspricht. Hierbei geht $z = \mathrm{i}\infty$ auf $q = 0$.

Definition 3.4.2
Die Funktion f heißt

- *außerwesentlich singulär in $\mathrm{i}\infty$, falls g außerwesentlich singulär in 0 ist, also höchtens einen Pol endlicher Ordnung hat.*
- *regulär in $\mathrm{i}\infty$, falls g eine hebbare Singularität im Nullpunkt hat. Man definiert dann $f(\mathrm{i}\infty) := g(0)$.*

Beide Begriffe hängen nicht von der Wahl von $N \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ab, da für f nicht konstant die reellen Perioden eine zyklische Untergruppe von $\mathbb{R}$ sind.

Definition 3.4.3
Eine meromorphe Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ ist eine meromorphe *Funktion*

$$f : \mathbb{H} \to \hat{\mathbb{C}}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ gilt*

$$f(Mz) = (cz+d)^k f(z) \ .$$

   Insbesondere gilt $f(z+1) = f(z)$, meromorphe Modulformen sind periodisch.

2. *Es existiert $C > 0$, so dass $f(z)$ für $\mathrm{Im}\,(z) > C$ keine Singularität hat.*

3. *f hat eine außerwesentliche Singularität bei $\mathrm{i}\infty$.*

Wir untersuchen Modulformen. Wegen $-E \in \Gamma$ folgt $f(z) = f(-Ez) = (-1)^k f(z)$, so dass alle Modulformen ungeraden Gewichts identisch verschwinden. In der Fourierentwicklung einer Modulform sind wegen der dritten Bedingung nur endlich viele a_n mit $n < 0$ von Null verschieden. Wir nennen

$$\mathrm{ord}(f; \mathrm{i}\infty) := \min\{n; a_n \neq 0\}$$

die Ordnung in $\mathrm{i}\infty$.

Satz 3.4.4.
Eine meromorphe Modulform $f \neq 0$ hat modulo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ nur endliche viele Pole und Nullstellen in $\mathbb{H}$. Die Ordnung $\mathrm{ord}(f;a)$ hängt nur von der Γ-Äquivalenzklasse von a ab.

Beweis.
Nach der zweiten Voraussetzung gibt es C, so dass die Modulform f für $\mathrm{Im}\, z > C$ keine Pole hat. Für großes C hat die Modulform dort auch keine Nullstellen. Denn die Nullstellen einer analytischen Funktion könnten eine außerwesentliche Singularität nur dann als Häufungspunkt haben, wenn die Funktion in einer Umgebung der Singularität identisch verschwinden würde.

Hat f an der Stelle z_0 Ordnung n, so gilt

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

mit $g(z_0) \neq 0$. Wir berechnen die Ordnung an der Stelle $z_0' := Mz_0$ für ein beliebiges $M \in \Gamma$. Es gilt mit $w = M^{-1}z$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(Mw) = (cw+d)^{-k} f(w) \\ &= (cM^{-1}z + d)^{-k} (M^{-1}z - M^{-1}z_0')^n \; g(M^{-1}z) \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Faktor sind offenbar holomorph und von Null verschieden bei z_0'. Für den zweiten Faktor beachten wir

$$M^{-1}z - M^{-1}z_0' = \frac{z - z_0}{(-cz+a)(-cz_0+a)} \;\; ;$$

der Nenner liefert eine weitere von Null verschiedene holomorphe Funktion bei z_0', der Zähler liefert die gewünschte Ordnung.

Der abgeschnittene Fundamentalbereich $\{z \in \mathcal{F} \mid \mathrm{Im}\, z \leq C\}$ ist offenbar kompakt und kann daher nur endlich viele Pole und Nullstellen enthalten. Die enthalten aber ein Repräsentantensystem der Pole und Nullstellen modulo Γ. □

Wir kommen nun zum zentralen Theorem:

Theorem 3.4.5 ($k/12$-Formel)**.**
Sei f eine von der Nullfunktion verschiedene meromorphe Modulform vom Gewicht k. Dann gilt

$$\sum_a \frac{1}{e(a)} \mathrm{ord}(f;a) + \mathrm{ord}(f; \mathrm{i}\infty) = \frac{k}{12} \, .$$

Hierbei durchlaufe a ein Repräsentantensystem modulo Γ aller Pole und Nullstellen von f.

Beweis.

- Wir nehmen erst einmal an, dass außer möglicherweise bei i, ρ und ρ^2 keine Pole von f auf dem Rand der Modulfigur $\mathcal{F}$ liegen. Sollte dies nicht der Fall sein, so umlaufen wir Pole auf den Vertikalkanten translationssymmetrisch und Pole auf dem Einheitskreis symmetrisch unter $z \mapsto -1/z$.

  Nach Satz 3.4.4 können wir $C > 0$ so groß wählen, dass f für $\operatorname{Im} z \geq C$ keine Pole und Nullstellen hat. Betrachte das Polstellen-zählende Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha g(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad \text{mit} \quad g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

  längs einer Kontur α, die bis in Höhe C entlang der Vertikalkanten von $\mathcal{F}$ läuft; die Punkte $\pm\frac{1}{2} + \mathrm{i}C$ mit einer horizontalen Linie verbindet und auf dem Einheitskreis um Null die Punkte ρ und ρ^2 verbindet, dabei allerdings auf kleinen Kreisen mit Radius ϵ um die Punkte ρ^2, i und ρ ins Innere von $\mathcal{F}$ ausweicht. Dieses Integral ist nach Satz 1.4.11

$$\sum_{a \bmod \Gamma, a \neq \mathrm{i}, \rho \bmod \Gamma} \operatorname{ord}(f; a) \ .$$

- Da auch g eine mit 1 periodische Funktion ist, heben sich die Integrale über die Vertikalkanten wegen deren entgegengesetzer Orientierung weg.

- Die beiden Bogenstücke auf dem Einheitskreis werden durch $z \mapsto -z^{-1}$ in einander überführt. Für diese Transformation gilt

$$f(-\frac{1}{z}) = \ z^k f(z) \ .$$

  Differentiation liefert

$$f'(-\frac{1}{z})z^{-2} = \ z^k f'(z) \ + kz^{k-1} f(z) \ ;$$

  nach Division durch $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ und Multiplikation mit z^2 folgt

$$g(-\frac{1}{z}) \ = z^2 g(z) \ + kz \ .$$

  Parametrisiert nun $\beta : [0,1] \to \mathbb{H}$ das eine Bogenstück des Einheitskreises, so parametrisiert $\tilde{\beta}(t) = -\beta(t)^{-1}$ das andere Bogenstück. Für dieses erhalten wir

$$\begin{aligned} \textstyle\int g(\zeta)\mathrm{d}\zeta \ &= \ -\textstyle\int_0^1 g(\tilde{\beta}(t))\tilde{\beta}(t)'\mathrm{d}t \\ &= \ -\textstyle\int_0^1 g(\beta(t)) \ \beta'(t) - k \int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

  Der erste Term hebt sich gegen das Integral über das zweite Bogenstück weg. Der zweite Term ist im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ gleich

$$-\frac{k}{2\pi\mathrm{i}}(\log \mathrm{i} - \log \rho^2) = -\frac{k}{2\pi\mathrm{i}}(\frac{2\pi\mathrm{i}}{4} - \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}) = \frac{k}{12} \ .$$

- Für die horizontale Integration verschafft man sich die Fourierentwicklung

$$g(z) \ = \sum a_n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}$$

  mit einem konstantem Koeffizienten, der wegen $f' = fg$ nach Vergleich der niedrigsten Ordnung gleich

$$a_0 = 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{ord}(f, \mathrm{i}\infty)$$

ist. Es folgt für dieses Integral

$$\int g(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \ 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{ord}(f,\mathrm{i}\infty) + \sum_{n\neq 0} a_n \int \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\zeta}\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{ord}(f,\mathrm{i}\infty)\ .$$

- Es fehlt noch die Behandlung der kleinen Kreisbögen mit Radius ϵ. Wir entwickeln g um $z=\rho^2=-\overline{\rho}$

  $$g(z) \ = \ b_{-1}(z+\overline{\rho})^{-1}+b_0+b_1(z+\overline{\rho})+\dots \qquad \text{mit} \qquad b_{-1}=\mathrm{ord}(f;\rho^2)\ .$$

  Nur der erste Term trägt im limes $\epsilon\to 0$ bei. Das Integral über ein Kreissegment mit Mittelpunkt a und Öffnungswinkel α ist

  $$\int\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}=\mathrm{i}\alpha\ .$$

  Somit folgt

  $$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\epsilon\to 0}\int g(\zeta)\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{6}\mathrm{ord}(f;\rho^2)\ .$$

  Analog folgen die Integrale um ρ und um i

  $$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\epsilon\to 0}\int g(\zeta)\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{6}\mathrm{ord}(f;\rho) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\epsilon\to 0}\int g(\zeta)\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{2}\mathrm{ord}(f;\rho^2)$$

  und somit wegen der Gleichheit der Ordnungen bei ρ und ρ^2 die Behauptung.

□

Wir ziehen Folgerungen aus der $k/12$-Formel und schränken uns dafür auf eine Unterklasse von meromorphen Modulformen ein.

Definition 3.4.6
Eine ganze Modulform vom Gewicht $k\in\mathbb{Z}$ ist eine analytische *Funktion $f:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften*

- *Für alle $M\in\Gamma$ gilt $f(Mz)= \ (cz+d)^k f(z)$.*
- *Die Funktion f ist in allen Bereichen $\mathrm{Im}\,z\geq C>0$ beschränkt (und daher nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz regulär in $\mathrm{i}\infty$).*

Eine meromorphe Modulform ist also genau dann ganz, wenn $\mathrm{ord}(f;a)\geq 0$ für alle $a\in\mathbb{H}\cup\{\mathrm{i}\infty\}$ gilt. Sie werden in einer Übungsaufgabe zeigen, dass jede meromorphe Modulform als Quotient zweier ganzer Modulformen darstellbar ist. Damit ist es ein wichtiger Schritt, sich einen Überblick über die ganzen Modulformen zu verschaffen.

Korollar 3.4.7.

1. *Jede ganze Modulform negativen Gewichts verschwindet identisch.*
2. *Jede ganze Modulform vom Gewicht 0 ist konstant.*
3. *Jede ganze Modulform vom Gewicht $k\in\mathbb{N}$ mit $k\neq 0$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{H}\cup\{\mathrm{i}\infty\}$.*

4. *Es gibt keine ganze Modulform $f \neq 0$ vom Gewicht 2.*

Beweis.

1. folgt aus der Tatsache, dass auf der linken Seite der $k/12$-Formel im Falle nicht-verschwindender *ganzer* Modulformen die Summe nicht-negativer Zahlen steht. Auf der rechten Seite steht aber eine negative Zahl.

2. Betrachte die Funktion $z \mapsto f(z) - f(\mathrm{i})$. Dies ist wieder eine ganze Modulform vom Gewicht 0, aber mit Nullstelle bei i. Also steht auf der rechten Seite der $k/12$-Formel ein Ausdruck, der größer als 1/2 ist, auf der linken Seite aber Null. Also muss die Modulfunktion $z \mapsto f(z) - f(\mathrm{i})$ verschwinden.

3. Hätte f keine Nullstelle, so wäre auch $1/f$ eine ganze Modulform, aber f oder $1/f$ wäre von negativem Gewicht. Dies ist im Widerspruch zu 1.

4. Für eine nicht-verschwindende ganze Modulform vom Gewicht k mit Nullstelle $a \in \mathbb{H} \cup \{\mathrm{i}\infty\}$ folgt aus der $k/12$-Formel
$$\frac{k}{12} \geq \frac{\mathrm{ord}(f;a)}{e(a)} \geq \frac{1}{3} .$$
Die rechte Seite der $k/12$-Formel ist aber gleich $2/12 = 1/6$. Also muss die Modulform verschwinden.

□

Wir wissen schon aus Satz 3.2.3, dass für $k \geq 3$ die Eisensteinreihen *ganze* Modulformen sind, denn es ist $G_k(\mathrm{i}\infty) = 2\zeta(k)$.

Satz 3.4.8.

1. *Die Eisensteinreihe G_4 verschwindet in ρ in erster Ordnung. Sie hat außer in ρ und den Γ-äquivalenten Punkten keine weitere Nullstelle in $\mathbb{H} \cup \{\mathrm{i}\infty\}$.*

2. *Die Eisensteinreihe G_6 verschwindet in* i *in erster Ordnung. Sie hat außer in* i *und den Γ-äquivalenten Punkten keine weitere Nullstelle in $\mathbb{H} \cup \{\mathrm{i}\infty\}$.*

3. *Die ganzen Modulformen G_4^3 und G_6^2 vom Grad 12 sind über $\mathbb{C}$ linear unabhängig.*

Beweis.

1. Der Punkt $\rho \in \mathbb{H}$ ist nach Satz 3.3.3 ein Fixpunkt unter $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, daher gilt
$$G_4(\rho) \;=\; (\rho)^4 G_4(\rho) .$$
Wegen $\rho^4 \neq 1$ hat die Eisensteinreihe G_4 eine Nullstelle in ρ. Hat diese Ordnung N, so trägt sie zur linken Seite der $k/12$-Formel $N/3$ bei. Die rechte Seite ist 1/3, also muss $N = 1$ gelten, und es kann keine weiteren Nullstellen geben.

2. Der Punkt $\mathrm{i} \in \mathbb{H}$ ist nach Satz 3.3.3 ein Fixpunkt unter $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, daher gilt

$$G_6(\mathrm{i}) \;=\; (\mathrm{i})^6 G_6(\mathrm{i}) \;= -G_6(\mathrm{i}) \; .$$

   Wegen $\mathrm{i}^6 \neq 1$ hat die Eisensteinreihe G_6 eine Nullstelle in i. Hat diese Ordnung N, so trägt sie zur linken Seite der $k/12$-Formel $N/2$ bei. Die rechte Seite ist $1/2$, also muss $N = 1$ gelten, und es kann keine weiteren Nullstellen geben.

3. folgt nun unmittelbar.

□

Aus der linearen Unabhängigkeit folgt, dass die Diskrimantenfunktion

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \quad \text{mit} \quad g_2 = 60 G_4 \quad \text{und} \quad g_3 = 140 G_6$$

nicht identitsch verschwindet. Wir wissen auch schon aus Korollar 3.2.5, dass Δ eine Nullstelle in $\mathrm{i}\infty$ hat.

Satz 3.4.9.
Sei $f \neq 0$ eine ganze Modulform vom Gewicht 12, die in $\mathrm{i}\infty$ verschwindet,, etwa $f = \Delta$. Dann hat f in $\mathrm{i}\infty$ eine Nullstelle erster Ordnung und sonst keine weitere Nullstelle in $\mathbb{H}$.

Beweis.
Die rechte Seite der $k/12$-Formel ist gleich Eins. Der Beweis geht nun wie der Beweis von Satz 3.4.8. □

Wir können nun auch die Injektivität der j-Funktion beweisen:

Theorem 3.4.10.
Die j-Funktion definiert eine bijektive Abbildung

$$j: \; \mathbb{H}/\Gamma \to \mathbb{C} \; .$$

Es existiert also zu jeder komplexen Zahl j genau eine Äquivalenzklasse ähnlicher Gitter mit absoluter Invariante j.

Beweis.
Sei $b \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass die Modulform vom Gewicht Null $f(z) = j(z) - b$ genau eine Nullstelle modulo Γ in $\mathbb{H}$ hat. Wir wissen wegen $j = g_2^3(\tau)/\Delta(\tau)$ aus Korollar 3.2.4 und Satz 3.4.9, dass $\mathrm{ord}(j, \mathrm{i}\infty) = -1$ gilt und die Funktion sonst keine Pole hat. Die Behauptung folgt jetzt aus der $k/12$-Formel. □

Wir wollen noch kurz einige Eigenschaften der absoluten modularen Invarianten j zusammenstellen: es ist $j(\mathrm{i}\infty) = \lim_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} \frac{g_2^3(z)}{\Delta(z)} = \infty$, da Δ eine Nullstelle bei $\mathrm{i}\infty$ hat und der Grenzwert der Eisensteinreihe endlich ist. Da $G_6(\rho) = 0$ gilt, ist $j(\rho) = 1$. Damit sind Pole und Nullstellen von j bestimmt. Ferner ist wegen $G_4(\mathrm{i}) = 0$

$$j(\mathrm{i}) = \frac{g_2^3(\mathrm{i})}{g_2^3(\mathrm{i}) - 27 g_3^2(\mathrm{i})} = 0 \; ;$$

in den Übungen wird gezeigt, dass j reelle Werte genau auf der imginären Achse und dem Rand der Modulfigur annimmt.

Definition 3.4.11
Eine <u>Modulfunktion</u> ist eine meromorphe Modulform vom Gewicht 0.

Ein Beispiel einer Modulfunktion ist die absolute modulare Invariante j. Rationale Funktionen einer Modulfunktion sind wieder Modulfunktionen. Die Modulfunktionen bilden also einen Körper $K(\Gamma)$, der die konstanten Funktionen als einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper enthält.

Theorem 3.4.12.
Der Körper $K(\Gamma)$ der Modulfunktionen wird von der absoluten Invarianten j erzeugt, d.h. jede Modulfunktion ist eine rationale Funktion in j:

$$K(\Gamma) \;=\; \mathbb{C}(j) \;\; .$$

Wir wollen für den Beweis auf Freitag-Busam, VI.2.11 und eine Übungsaufgabe verweisen.

3.5 Die Algebra der ganzen Modulformen

Definition 3.5.1

1. *Eine ganze Modulform vom Gewicht k, die in der Spitze $\mathrm{i}\infty$ verschwindet,*

$$f(\mathrm{i}\infty) := \lim_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} f(z) \;= 0 \;,$$

heißt <u>Spitzenform</u> vom Gewicht k.

2. *Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $[\Gamma, k]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der ganzen Modulformen vom Gewicht k und mit $[\Gamma, k]_0$ den Unterraum der Spitzenformen.*

Bemerkungen 3.5.2.

1. *Spitzenformen heißen im Englischen "cusp forms" und im Französischen "formes paraboliques".*
2. *Die Diskriminantenfunktion Δ ist nach Korollar 3.2.5 ein Beispiel für eine Spitzenform; sie hat Gewicht 12.*
3. *Ist $f_i \in [\Gamma, k_i]$, so ist $f_1 \cdot f_2 \in [\Gamma, k_1 + k_2]$.*
4. *Das Produkt einer Spitzenform mit einer beliebigen* ganzen *Modulform ist wieder eine Spitzenform.*

Bemerkung 3.5.3.
Ist $g \in [\Gamma, k]$ eine Nichtspitzenform, so gilt

$$[\Gamma, k] = [\Gamma, k]_0 \oplus \mathbb{C} g \, .$$

Der Unterraum der Spitzenformen hat also höchstens die Kodimension 1.

Beweis.
Ist $f \in [\Gamma, k]$, so ist
$$h := f - \frac{f(\mathrm{i}\infty)}{g(\mathrm{i}\infty)} g$$
eine Spitzenform. □

Satz 3.5.4.
Die Multiplikation mit der Diskriminantenfunktion Δ vermittelt einen Isomorphismus
$$\begin{array}{rcl} [\Gamma, k-12] & \to & [\Gamma, k]_0 \\ f & \mapsto & f \cdot \Delta \end{array}$$

Beweis.
Da die Diskriminantenfunktion Δ nach der Bemerkung vor Satz 3.4.9 nicht verschwindet, ist die Abbildung injektiv. Ist andererseits $g \in [\Gamma, k]_0$, so ist
$$f := \frac{g}{\Delta} \in [\Gamma, k-12] \ ,$$
denn f hat das richtige Transformationsverhalten und ist in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ analytisch, weil Δ dort nach Satz 3.4.9 keine Nullstelle hat. Ferner ist f auch in $\mathrm{i}\infty$ regulär, da Δ dort nur eine Nullstelle erster Ordnung hat. □

Theorem 3.5.5 (Struktursatz)**.**
Die Monome
$$\{G_4^\alpha G_6^\beta \quad \textit{mit} \quad 4\alpha + 6\beta = k \quad \textit{und} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\}$$
bilden eine Basis von $[\Gamma, k]$. Folglich ist die Dimension des Vektorraums des Modulformen endlich und es gilt
$$\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma, k] = \begin{cases} [\frac{k}{12}], & \textit{falls } k = 2 \bmod 12 \\ [\frac{k}{12}] + 1, & \textit{falls } k \neq 2 \bmod 12 \end{cases} ,$$
wobei für $q \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $[q]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich q bezeichnet.

Beweis.

- Wir zeigen durch Induktion nach k, dass $[\Gamma, k]$ von den angegebenen Monomen erzeugt wird. Als Induktionsbeginn eignet sich $k = 0$, da jede ganze Modulform vom Gewicht 0 nach Korollar 3.4.7.2 konstant ist. Modulformen von negativem Gewicht gibt es nach Korollar 3.4.7.3 nicht.

  Sei f eine nicht-verschwindende Modulform vom Gewicht $k \geq 4$. Jede gerade Zahl $k \geq 4$ lässt sich in der Form $k = 4\alpha + 6\beta$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen α, β schreiben. Da nach Satz 3.2.4 $\lim_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} G_k(z) \neq 0$ gilt, existiert $C \in \mathbb{C}$, so dass
  $$f - C\ G_4^\alpha G_6^\beta$$
  eine Spitzenform ist, die sich nach Satz 3.5.4 in der Form
  $$f - C\ G_4^\alpha G_6^\beta = \Delta \cdot g$$

mit einer Modulform g kleineren Gewichts schreiben lässt. Wir wenden nun die Induktionsannahme auf g an und können f als Linearkombination in Monomen in G_4 und G_6 schreiben.

- Ein kombinatorische Überlegung zeigt, dass die Zahl der Monome gleich den angegebenen Dimensionen ist. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, reicht es daher aus, die Dimensionsformel zu zeigen.

  Dies machen wir wiederum mit Induktion nach k und beachten, dass nach Korollar 3.4.7.2 gilt $\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma, 0] = 1$ und nach Korollar 3.4.7.4 $\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma, 2] = 0$. Für negatives Gewicht verschwinden nach Satz 3.4.7 die Modulformen, so dass wir eine hinreichende Induktionsverankerung haben. Nun ist aber sicher jedes Mononom $G_4^\alpha \cdot G_6^\beta$ mit $4\alpha + 6\beta = k$ eine ganze Modulform vom Gewicht k, aber keine Spitzenform. Daher folgt aus Satz 3.5.4 die Rekursion

  $$\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma, k] = 1 + \dim_{\mathbb{C}}[\Gamma, k-12] \quad \text{für} \quad k \geq 4 \ .$$

  Daraus folgt die Dimensionsformel, die die gleiche Rekursionsrelation erfüllt.

□

3.6 Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe von acht Quadraten

Wir wollen eine Anwendung der Theorie betrachten und eine Formel für die Anzahl $A_k(n)$ der k-Tupel ganzer Zahlen herleiten, deren Quadrate sich zu n summieren. Es geht also darum, in wie vielerlei Weise man eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe von $k = 8$ Quadraten ganzer Zahlen schreiben kann.

Zur Vorbereitung setzen wir für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sigma_k(n) := \sum_{d|n;\, 1 \leq d \leq n} d^k$$

Dann hat die Eisensteinreihe die folgende Fourierentwicklung, für deren Herleitung wir auf Freitag-Busam, VII.1 verweisen.

Satz 3.6.1.
Für gerades $k \geq 4$ gilt mit $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z}$

$$\begin{aligned} G_k(z) &:= \textstyle\sum_{c=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{d=-\infty}^{\infty} (cz+d)^{-k} \right) \\ &= 2\zeta(k) + \tfrac{2(2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \end{aligned}$$

Der konstante Term ist uns schon aus Satz 3.2.4 bekannt. Für $k = 2$ nehmen wir diese Formel als Definition einer Eisensteinreihe G_2, die aber keine Modulform mehr sein kann, denn es gibt ja keine Modulformen vom Gewicht 2. In der Tat konvergiert diese Reihe nur bedingt, so dass wir beim Umordnen aufpassen müssen. Es gilt für diese Funktion

$$G_2(-\frac{1}{z}) = z^2 G_2(z) \ - 2\pi \mathrm{i} z \ .$$

Diese Eisensteinreihe erlaubt es, auch die Frage zu untersuchen, wann eine natürliche Zahl die Summe von vier Quadraten ist. In Berechnungen von Anomalien tritt oft die Funktion $\hat{G}_2(z) := G_2(z) - \frac{\pi}{\operatorname{Im} z}$ auf, die modular aber nicht holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.

Korollar 3.6.2.
Auch für die Diskrikinantenfunktion $\Delta(z) = g_2^3(z) - 27g_3^2(z)$ *folgt eine Fourierdarstellung*

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m z}$$

mit $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ *und* $\tau(1) = 1$.

Wir müssen nun die Theta-Funktion aus Definition 2.5.5 in ihrem anderen Argument betrachten. (Man beachte dabei, dass wir jetzt das Argument mit z bezeichnen, dass in Definition 2.5.5 mit τ bezeichnet wurde.) Die folgenden Eigenschaften werden wir nicht beweisen und verweisen auf Freitag-Busam, Kapitel VI.4:

Satz 3.6.3.
Die *<u>Thetareihe</u>*

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n^2 z}$$

konvergiert auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ *und stellt dort eine analytische Funktion ohne Nullstellen dar. Für die Thetareihe gilt:*

1. $\vartheta(z+2) = \vartheta(z)$
2. $\vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}}\vartheta(z)$
3. $\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} \vartheta(z) = 1$
4. $\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} \sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}}^{-1} \vartheta(1-\frac{1}{z})\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} z/4} = 2.$

Diese Eigenschaften benutzen wir für eine funktionentheoretische Charakterisierung von ϑ:

Satz 3.6.4.
Sei $r \in \mathbb{Z}$ *und* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *eine analytische Funktion mit den Eigenschaften:*

1. $f(z+2) = f(z)$
2. $f(-\frac{1}{z}) = (\sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}})^r f(z)$
3. $\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} f$ *existiert.*
4. $\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} (\sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}})^{-r} f(1-\frac{1}{z})\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} r z/4}$ *existiert.*

Dann gilt

$$f(z) = \mathrm{const} \cdot \vartheta(z)^r$$

mit der Konstante $\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} f(z)$.

Beweis.
Die Funktion

$$h(z) := \frac{f(z)}{\vartheta(z)^r}$$

ist analytisch auf $\mathbb{H}$ und eine "Modulform" vom Gewicht 0 für die von S und T^2 erzeugte Untergruppe von Γ, der sogenannten Thetagruppe. Wie für die elliptische Modulgruppe Γ

selbst in Korollar 3.4.7 kann man nun schließen, dass h konstant ist. $\square$

Für unser Problem, eine natürliche Zahl als Summe von 8 Quadraten ganzer Zahlen zu schreiben, betrachten wir nun die Funktion

$$\vartheta(z)^8 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n^2 z}\right)^8 .$$

Offenbar ist der Koeffizient von q^n mit $q = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z}$ dieser Funktion genau gleich der Anzahl $A_8(n)$ der Möglichkeiten, die natürliche Zahl n als Summe von 8 Quadraten zu schreiben.

Wir werden nun mit Hilfe der Eisensteinreihe G_4 eine in der oberen Halbebene analytische Funktion konstruieren, die die charakteristischen Eigenschaften von ϑ^8 hat. Die Eisensteinreihe G_4 selbst hat als Modulform vom Grad 4 die Eigenschaften 1.-2. aus Satz 3.6.4, und erfüllt wegen Satz 3.2.4 auch Eigenschaft 3. Aber es ist

$$z^{-4} G_4(1 - \frac{1}{z}) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z} = z^{-4} G_4(-\frac{1}{z}) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z} = G_4(z) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z} ;$$

nun hat G_4 wohl nach Satz 3.2.4 einen von Null verschiedenen Grenzwert für $\mathrm{Im}\,(z) \to \infty$, aber $|\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z}| = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{Im}\,(z)}$ wächst dann über alle Grenzen. Wir brauchen eine weitere Funktion mit den Eigenschaften 1.-3. aus Satz 3.6.4 zum Kompensieren:

Lemma 3.6.5.
Die Funktion

$$g_k(z) := G_k(\frac{z+1}{2})$$

mit $k > 2$ erfüllt die Transformationsformeln

$$g_k(z+2) = g_k(z) \quad \textit{und} \qquad g_k(-\frac{1}{z}) = z^k g_k(z) .$$

Beweis.
Die Periodizität mit 2 ist klar. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ gilt

$$A(\frac{z+1}{2}) = \frac{-\frac{1}{z}+1}{2}$$

und somit

$$g_k(-\frac{1}{z}) = (2 \cdot \frac{z+1}{2} - 1)^k g_k(z) = z^k g_k(z) .$$

$\square$

Wieder erfüllt g_4 nicht die vierte Bedingung aus Satz 3.6.4. Aber alle Linearkombinationen

$$f_{a,b}(z) := a \cdot G_4(z) + b \cdot G_4(\frac{z+1}{2})$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ erfüllen die gewünschten Transformationsformeln und haben einen endlichen Grenzwert für Bedingung 3:

$$\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} aG_4(z) + bG_4(\frac{z+1}{2}) = 2(a+b)\zeta(4) .$$

Man muss also nur noch a und b so einrichten, dass der Grenzwert in der vierten Bedingung existiert.

Es ist

$$z^{-4} f_{a,b}(1-\frac{1}{z})\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}(aG_4(z) \; + 16bG_4(2z)) \; .$$

Da nun G_4 sich um $z = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, ist

$$z^{-4} f(1-\frac{1}{z})\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z} = q^{-1}[a_0(a+16b) + \text{höhere Potenzen in } q] \; ,$$

wobei a_0 der Koeffizient des konstanten Gliedes von G_4 ist. Daher ist genau für $a = -16b$ die Funktion proportional zu ϑ^8. Wegen $\lim_{\mathrm{Im}\,(z)\to\infty} \vartheta(z) = 1$ ist die Konstante festgelegt zu

$$2(a+b)\zeta(4) = 1 \; .$$

Mit Hilfe von $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ folgt nun:

Theorem 3.6.6.
Es gilt

$$\theta^8(z) \; = \frac{3}{\pi^4}\left(16G_4(z) \; - G_4(\frac{z+1}{2})\right)$$

Trägt man für die Eisensteinreihen die Entwicklung aus Satz 3.6.1 ein, so folgt

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_8(n)\mathrm{e}^{\pi inz} = 1 + 16^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \; \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz} - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)(-1)^n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}$$

und somit nach kleinen Umformungen für ungerade n

Korollar 3.6.7.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl der Arten, n als Summe von 8 Quadraten zu schreiben, die Formel

$$A_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n-d} d^3 \; .$$

3.7 Integralität der Fourierkoeffizienten

Wir wollen die erzielten Resultate noch ausnutzen, um mehr über die Fourierkoeffizienten der j-Funktion zu lernen.

Lemma 3.7.1.

1. *Sind f und g für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihen der Form*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \quad \textit{und} \quad g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \quad \textit{mit } a_n, b_n \in \mathbb{C}$$

   mit $b_0 = 1$ und $g(q) \neq 0$ für $|q| < 1$, so ist auch f/g eine für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe.

2. *Sind speziell die Koeffizienten a_n und b_n sämtlich ganze Zahlen, so sind auch die Koeffizienten von f/g aus $\mathbb{Z}$.*

Beweis.
Offenbar ist auch f/g wegen $g(q) \neq 0$ holomorph und lässt sich in eine Potenzreihe

$$f/g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$$

entwickeln. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \right) \; .$$

Der Koeffizientenvergleich von q^0 zeigt $a_0 = b_0 \cdot c_0$; wegen $b_0 = 1$ folgt $c_0 = a_0$. Aus der Cauchy'schen Produktformel folgt die Rekursionsrelation

$$c_n = a_n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j b_{n-j} \;\; ,$$

aus der auch die Ganzzahligkeit aller Koeffizienten c_n folgt. □

Satz 3.7.2.
Die absolute Invariante $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ besitzt eine Fourier-Enwicklung

$$1728 \cdot j(z) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z} + \sum_{m=0}^{\infty} j_m \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m z}$$

mit $j_m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \geq 0$.

Beweis.
Wir erhalten mit der Reihendarstellung von G_4 aus Satz 3.6.1 und von $\Delta(z)$ aus Korollar 3.6.2 die Reihendarstellung aus

$$\begin{aligned} 1728 \cdot j(z) &= (12 \cdot 60)^3 \frac{(G_4(z))^3}{\Delta(z)} \\ &= \underbrace{(12 \cdot 60)^3 \frac{\pi^{12}}{45^3} \frac{1}{(2\pi)^{12}}}_{=1} \frac{(1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m z})^3}{\sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m z}} \end{aligned}$$

Hierauf können wir offensichtlich Lemma 3.7.1 anwenden. □

Bemerkung 3.7.3.
Es stellt sich heraus, dass die Koeffizienten

$$1728 j(z) = 1/q + 744 + 196884 q + 21493760 q^2 + \ldots = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n$$

alle sogar positive ganze Zahlen sind, $c(n) \in \mathbb{N}_0$. Die natürlichste Interpretation nicht-negativer ganzer Zahlen ist als Dimension eines Vektorraums. Tatsächlich sind alle Zahlen, die auftreten *"einfache" Summen der Dimensionen irreduzibler Darstellungen des Fischer-Griess Monsters M, der größten sporadischen einfachen Gruppe mit*

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \sim 10^{54} \quad \textit{Elementen.}$$

Dies legt es nahe, hier nach einer algebraischen Struktur zu suchen mit einer natürlichen Graduierung, deren homogene Komponenten Dimension $c(n)$ haben. Man bezeichnet heute so etwas, aus Gründen die ich nicht erklären kann, als eine Kategorifizierung. Richard Borcherds hat, basierend auf Ideen aus der Stringtheorie, eine Vertexalgebra mit diesen Eigenschaften gefunden, deren Automorphismengruppe das Monster M ist. Für Übersichtsartikel verweisen wir auf

- *Peter Goddard, The Work of R.E. Borcherds. Laudation delivered at the International Congress of Mathematicians in Berlin following the award of the Fields Medal to Richard Borcherds.*
  `http://arxiv.org/abs/math/9808136`
- *Urmie Ray, Generalized Kac-Moody algebras and some related topics, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (2001), 1-42.*
  `http://www.ams.org/journals/bull/2001-38-01/S0273-0979-00-00891-0/home.html`

4 Riemannsche Flächen

Wir haben schon gesehen, dass sich wichtige Funktionen wie die Quadratwurzel oder der Logarithmus nicht auf der ganzen komplexe Ebene $\mathbb{C}$ definieren lassen. Es ist unbefriedigend, aus $\mathbb{C}$ ad hoc eine Teilmenge wie die negative reelle Halbachse herauszunehmen. In beiden Fällen würde man gerne Funktionen betrachten, die mehrere Werte annehmen, etwa $\pm\sqrt{z}$ oder $\log|z| + \mathrm{Arg}(z) + 2\pi i n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Da dies aber nicht widerspruchsfrei möglich ist, werden wir die Funktionen auf einer mehrblättrigen Fläche über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ definieren, die für jeden gewünschten Funktionswert ein Blatt hat.

Andererseits wissen wir aus dem Studium elliptischer Funktionen auch, dass diese als Funktionen auf einem Torus angesehen werden können. Daher machen wir uns gleich von der Voraussetzung frei, über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ zu arbeiten und betrachten allgemeinere Flächen.

4.1 Definition der Riemannschen Fläche

Definition 4.1.1

1. *Eine n-dimensionale (reelle) <u>Mannigfaltigkeit</u> ist ein Hausdorffscher [2] topologischer Raum X mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Um eine gute Integrationstheorie zu bekommen, fordert man bei allgemeinen Mannigfaltigkeiten noch, dass X parakompakt ist. Für Riemannsche Flächen kann man dies zeigen, siehe dazu den Satz von Radó, Forster §23.*

2. *Sei X eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine <u>komplexe Karte</u> ist ein Homöomorphismus, also eine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung, $\varphi : U \to V$*

[2] Ein topologischer Raum M heißt Hausdorffsch, wenn es für je zwei verschiedene Punkte $p, q \in M$ Umgebungen U_p von p und U_q von q gibt, die disjunkt sind, $U_p \cap U_q = \emptyset$.

einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$. Zwei komplexe Karten heißen biholomorph verträglich, falls die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ biholomorph ist.

3. *Ein komplexer Atlas auf X ist ein System $\mathfrak{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i, i \in I\}$ paarweise biholomorph verträglicher Karten, die X überdecken, d.h. $\cup_{i \in I} U_i = X$.*

4. *Zwei komplexe Atlanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ heißen biholomorph verträglich, falls jede Karte von $\mathfrak{A}$ mit jeder Karte von $\mathfrak{A}'$ biholomorph verträglich ist.*

Bemerkungen 4.1.2.

1. *Ist $\varphi : U \to V$ eine komplexe Karte, $U_1 \subset U$ offen und $V_1 := \varphi(U_1)$, so ist $\varphi|_{U_1} : U_1 \to V_1$ eine mit $\varphi : U \to V$ biholomorph verträgliche Karte.*

2. *Da die Verkettung biholomorpher Funktionen wieder biholomorph ist, folgt, dass die biholomorphe Verträglichkeit zwischen komplexen Atlanten eine Äquivalenzrelation ist.*

Definition 4.1.3
Unter einer komplexen Struktur Σ auf einer zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit X versteht man eine Äquivalenzklasse biholomorph verträglicher Atlanten auf X.

Bemerkungen 4.1.4.

1. *Jede komplexe Struktur Σ auf X kann also durch die Angabe eines komplexen Atlas definiert werden.*

2. *Jede komplexe Struktur Σ auf X enthält einen eindeutig bestimmten maximalen Atlas $\mathfrak{A}^*$: ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Atlas aus Σ, so besteht $\mathfrak{A}^*$ aus allen komplexen Karten auf X, die mit jeder Karte von $\mathfrak{A}$ biholomorph verträglich sind.*

Definition 4.1.5
Eine Riemannsche Fläche ist ein Paar (X, Σ), bestehend aus einer zusammenhängenden zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur Σ auf X.

Bemerkungen 4.1.6.

1. *Man schreibt meist nur X, wenn klar ist, welche komplexe Struktur Σ gemeint ist. Manchmal schreibt man auch $(X, \mathfrak{A})$, wenn der Atlas $\mathfrak{A}$ ein Repräsentant der komplexen Struktur Σ ist.*

2. *Ist X eine Riemannsche Fläche, so verstehen wir unter einer Karte auf X immer eine* komplexe *Karte des maximalen Atlas zur komplexen Struktur auf X.*

3. *Ist ein Punkt $x \in X$ in mehreren Karten enthalten, so ist keine Karte vor der anderen ausgezeichnet. Deshalb können wir nur die Begriffe der Funktionentheorie auf Riemannsche Flächen übertragen, die invariant unter biholomorphen Abbildungen sind.*

Beispiele 4.1.7.

1. *Die Gauß'sche Zahlenebene $\mathbb{C}$ ist eine Riemannsche Fläche. Ihre komplexe Struktur wird definiert durch den Atlas, dessen einzige Karte die Identität $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist.*

2. *Gebiete sind Riemannsche Flächen. Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ ein Gebiet, d.h. eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Eine natürliche komplexe Struktur wird durch den Atlas definiert, der aus allen komplexen Karten $\varphi : U \to V$ des maximalen Atlas $\mathfrak{A}^*$ auf X besteht, für die $U \subset Y$ gilt.*

   Insbesondere ist jedes Gebiet $Y \subset \mathbb{C}$ eine Riemannsche Fläche.

3. *Die Riemannsche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_1$. (Die Bezeichnung kommt daher, dass man $\mathbb{P}_1$ als den eindimensionalen projektiven Raum über dem Körper der komplexen Zahlen ansehen kann.)*

   Wir hatten schon in der Vorlesung Funktionentheorie I gesehen, dass $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_1$ ein kompakter Hausdorff-Raum ist, der als topologischer Raum isomorph zur Sphäre S^2 ist. Wir betrachten die offenen Teilmengen von $\mathbb{P}_1$

   $$U_1 := \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad U_2 := \mathbb{P}_1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \ .$$

   Die Abbildung $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ sei die identische Abbildung,

   $$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} 1/z & \textit{für } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \textit{für } z = \infty \end{cases} \end{array}$$

   Da dies Homöomorphismen sind, ist $\mathbb{P}_1$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Da die Definitionsgebiete U_1 und U_2 der Karten (weg-)zusammenhängend sind und nicht-leeren Durchschnitt haben, ist auch $\mathbb{P}_1$ (weg-)zusammenhängend.

   Die komplexe Struktur auf $\mathbb{P}_1$ definieren wir durch den Atlas aus diesen beiden Karten. In der Tat sind diese Karten biholomorph verträglich: es ist $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$, und

   $$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

   ist als rationale Funktion auf dem angegebenen Gebiet eine biholomorphe Abbildung.

4. *Wir beschreiben Tori: Seien ω_1, ω_2 zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen. Dann heißt die Untergruppe von der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$*

   $$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

   das von ω_1, ω_2 aufgespannte Gitter.

   Zwei komplexe Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$ heißen äquivalent modulo Γ, falls $z - z' \in \Gamma$. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{C}/\Gamma$ bezeichnet. Es sei $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion auf Äquivalenzklassen.

   Wir versehen $\mathbb{C}/\Gamma$ mit der Quotiententopologie: eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ heißt genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ in $\mathbb{C}$ offen ist. Dadurch wird $\mathbb{C}/\Gamma$ zu einem Hausdorff-Raum und die Projektion π zu einer stetigen Abbildung. Da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, ist auch $\mathbb{C}/\Gamma$ als stetiges Bild zusammenhängend. Der Quotient ist kompakt als Bild des kompakten Fundamentalbereichs, also des Parallelogramms

   $$P := \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}$$

Die Abbildung π ist auch offen, d.h. für jede offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ ist das Bild $\pi(V) \subset \mathbb{C}/\Gamma$ offen. Nach Definition der offenen Mengen in $\mathbb{C}/\Gamma$ ist dafür zu zeigen, dass das Urbild $\hat{V} := \pi^{-1}\pi(V)$ von $\pi(V)$ in $\mathbb{C}$ offen ist. Es gilt

$$\hat{V} = \cup_{\omega\in\Gamma}(\omega + V) \ .$$

Jede Teilmenge $\omega + V$ ist offen, also ist auch $\hat{V}$ als Vereinigung offener Mengen offen.

Wir wollen noch eine komplexe Struktur auf $\mathbb{C}/\Gamma$ einführen: sei $V \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, die kein Paar modulo Γ äquivalenter Punkte enthält. $U := \pi(V)$ ist offen und $\pi|_V : V \to U$ ist ein Homöomorphismus. Seine Umkehrabbildung $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ ist eine komplexe Karte auf $\mathbb{C}/\Gamma$. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Karten, die sich so erhalten lassen. Wir zeigen jetzt, dass je zwei solche Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$ aus $\mathfrak{A}$ biholomorph verträglich sind. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \ .$$

Für jedes $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ folgt aus $(\pi \circ \varphi_i)|_{U_1\cap U_2} = \mathrm{id}|_{U_1\cap U_2}$ die Identität $\pi \circ \psi(z) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, also $\psi(z) - z \in \Gamma$. Da Γ diskret und ψ stetig ist, folgt, dass $\psi(z) - z$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ konstant ist. Also ist ψ auf jeder Zusammenhangskomponente eine Verschiebung um einen Gittervektor in Γ, so dass ψ und ebenso ψ^{-1} holomorph sind.

Ordnet man schließlich dem durch $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ repräsentierten Punkt von $\mathbb{C}/\Gamma$ den Punkt

$$(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\mu}) \in S^1 \times S^1$$

zu, so erhält man einen Homöomorphismus von $\mathbb{C}/\Gamma$ auf den Torus $S^1 \times S^1$.

Definition 4.1.8
Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ heißt holomorph*, wenn für jede Karte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ auf X die Funktion*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$$

im Sinne von Definition 1.1.1 auf der offenen Menge $\varphi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Menge aller auf Y holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(Y)$.

Bemerkungen 4.1.9.

1. *Summe und Produkt holomorpher Funktionen sind wieder holomorph. Konstante Funktionen sind holomorph. Für jede offene Menge $Y \subset X$ wird dadurch $\mathcal{O}(Y)$ zu einer (kommutativen) $\mathbb{C}$-Algebra.*

2. *Es reicht aus, die in der Definition gestellte Bedingung nur für eine Familie von Karten nachzurechnen, die Y überdeckt. Dann gilt sie für alle anderen biholomorph verträglichen Karten automatisch.*

3. *Ist $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ eine Karte auf X, so ist φ insbesondere eine komplexwertige Funktion auf U. Sie ist trivialerweise holomorph. Man nennt φ auch eine lokale Koordinate, lokale Koordinatenfunktion oder Ortsuniformisierende (englisch: uniformizing parameter) und (U, φ) eine Koordinatenumgebung jedes Punktes in U. In diesem Zusammenhang verwendet man statt des Buchstabens φ auch oft den Buchstaben z.*

Der folgende Satz folgt unmittelbar aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 1.4.5:

Satz 4.1.10 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.**
Sei U eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche und $a \in U$. Die Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ sei in einer gewissen Umgebung von a beschränkt. Dann lässt sich f eindeutig zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen.

Wir wollen nun Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen auszeichnen:

Definition 4.1.11
Seien X und Y Riemannsche Flächen.

1. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt holomorph, wenn für jedes Paar von Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ auf Y mit $f(U_1) \subset U_2$ die Abbildung*

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

   von Teilmengen von $\mathbb{C}$ holomorph im Sinne von Definition 1.1.1 ist.

2. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt biholomorph, wenn sie bijektiv ist und sowohl $f : X \to Y$ als auch $f^{-1} : Y \to X$ holomorph sind.*

3. *Zwei Riemannsche Flächen X und Y heißen isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : X \to Y$ gibt.*

Bemerkungen 4.1.12.

1. *Im Spezialfall $Y = \mathbb{C}$ sind offenbar holomorphe Abbildungen $f : X \to Y$ das gleiche wie holomorphe Funktionen auf X.*

2. *Sind X, Y, Z Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ holomorphe Abbildungen, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ holomorph.*

3. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Riemannschen Flächen ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ und jede holomorphe Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ die "zurückgezogene Funktion"*

$$\varphi \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{C}$$

   in $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$ liegt. Dies folgt aus den Definitionen und der vorangegangenen Bemerkung.

   Eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ induziert deshalb eine Abbildung

$$f^* : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(f^{-1}(V)) \; .$$

   Man prüft leicht nach, dass dies ein Ringhomomorphismus ist.

   Ist $g : Y \to Z$ eine weitere holomorphe Abbildung, $W \subset Z$ offen, $V := g^{-1}(W)$ und $U := f^{-1}(V)$, so ist $(g \circ f)^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(U)$ die Zusammensetzung der Abbildungen $g^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ und $f^* : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$, also

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \; .$$

Satz 4.1.13 (Identitätssatz).
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f_1, f_2 : X \to Y$ zwei holomorphe Abbildungen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$ mit unendlichen vielen Elementen übereinstimmen, die einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt. Dann sind die holomorphen Abbildungen f_1 und f_2 identisch.

Beweis.
Sei G die Menge aller Punkte $x \in X$, die eine Umgebung W besitzen mit $f_1|_W = f_2|_W$. Nach Definition ist G offen. Wir zeigen zunächst, dass G auch abgeschlossen ist.

Sei dazu b ein Randpunkt von G. Aus der Stetigkeit von f_1 und f_2 in b folgt $f_1(b) = f_2(b)$. Es gibt daher Karten $\varphi : U \to V$ auf X und $\varphi' : U' \to V'$ auf Y mit $b \in U$ und $f_i(U) \subset U'$. Indem wir uns auf die Zusammenhangskomponente von U beschränken, die b enthält, dürfen wir annehmen, dass U zusammenhängt.

Die Abbildungen
$$g_i := \varphi' \circ f_i \circ \varphi^{-1} : V \to V' \subset \mathbb{C}$$
sind holomorphe Funktionen auf dem Gebiet $V \subset \mathbb{C}$. Da $U \cap G \neq \emptyset$ gilt, stimmen g_1 und g_1 nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen auf dem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ überein. Deshalb gilt $f_1|_U = f_2|_U$. Daraus folgt aber insbesondere $b \in G$, so dass G auch abgeschlossen ist.

Da X zusammenhängend ist, folgt $G = \emptyset$ oder $G = X$. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, da nach Korollar 2.4.3 von Funktionentheorie I sicher $a \in G$ gilt. Also stimmen f_1 und f_2 auf ganz X überein. □

Definition 4.1.14
Sei X eine Riemannsche Fläche und Y eine offene Teilmenge von X. Unter einer meromorphen Funktion auf Y versteht man eine auf einer offenen Teilmenge $Y' \subset Y$ definierte holomorphe Funktion $f : Y' \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Die Menge $Y \setminus Y'$ besteht nur aus isolierten Punkten.*
2. *Für jeden Punkt $p \in Y \setminus Y'$ gilt*
$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$$

Die Punkte von $Y \setminus Y'$ heißen Polstellen von f. Die Menge aller auf Y meromorphen Funktionen werde mit $\mathcal{M}(Y)$ bezeichnet.

Bemerkungen 4.1.15.

1. *Die Definition 4.1.14 verallgemeinert Definition 1.4.9 von Gebieten in $\mathbb{C}$ und Definition 2.5.1 von Gebieten auf $\mathbb{P}_1$ auf offene Teilmengen Riemannscher Flächen.*
2. *Sei (U, z) eine Koordinatenumgebung einer Polstelle p einer meromorphen Funktion f mit $z(p) = 0$. Dann lässt sich f in einer Umgebung von p in eine Laurentreihe der Form*
$$f|_U = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu z^\nu \quad \text{mit} \quad c_\nu \in \mathbb{C}$$
entwickeln. Man beachte, dass hier eine Gleichung von meromorphen Funktionen auf U steht.

3. *Die Menge $\mathcal{M}(Y)$ der auf Y meromorphen Funktionen ist in natürlicher Weise eine $\mathbb{C}$-Algebra. Die Summe bzw. das Produkt zweier meromorpher Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(Y)$ ist zunächst als holomorphe Funktion dort definiert, wo f und g gemeinsam holomorph sind. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 4.1.10 wird dann $f + g$ bzw. $f \cdot g$ über eventuell hebbare Singularitäten fortgesetzt.*

Beispiel 4.1.16.
Sei $n \geq 1$ und

$$F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n \quad \text{mit} \quad c_k \in \mathbb{C}$$

ein normiertes Polynom. Dann definiert F eine holomorphe Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Fasst man $\mathbb{C}$ als Teilmenge von $\mathbb{P}_1$ auf, so erhält man eine Funktion, die auf dem Komplement $\mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$ der diskreten Teilmenge $\{\infty\}$ holomorph ist. Es gilt für $z \neq 0$

$$F(z) = z^n \left(1 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n}\right) ,$$

wobei der zweite Faktor für $z \to \infty$ konvergent ist. Daraus folgt $\lim_{z\to\infty} |F(z)| = \infty$. Also ist $F \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$.

Wir werden nun allgemeiner meromorphe Funktionen als holomorphe Funktionen in die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$ interpretieren.

Satz 4.1.17.

1. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$. Für eine Polstelle p von f definiere man $f(p) = \infty$. Dann erhält man eine holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$.*
2. *Ist umgekehrt $f : X \to \mathbb{P}$ eine holomorphe Abbildung, so ist entweder f konstant gleich ∞ oder $f^{-1}(\infty)$ besteht nur aus isolierten Punkten und $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ ist eine meromorphe Funktion auf X.*

Wir werden von nun ab eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit der ihr zugeordneten holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$ identifizieren.

Beweis.

- Sei $f \in \mathcal{M}(X)$ und P die Polstellenmenge von f. Die durch f definierte Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$ ist jedenfalls stetig. Seien $\varphi : U \to V$ und $\varphi' : U' \to V'$ beliebige Karten auf X bzw. auf $\mathbb{P}_1$ mit $f(U) \subset U'$. Wir haben zu zeigen, dass

  $$g := \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V'$$

  holomorph ist. Da f auf $X \setminus P$ holomorph ist, folgt, dass g auf $V \setminus \varphi(P)$ holomorph ist. Außerdem ist die Abbildung g stetig und daher lokal beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz Korollar 4.1.10 ist daher g auf ganz V holomorph.

- Für die Umkehrung müssen wir uns nur überlegen, dass $f^{-1}(\infty)$ nur aus isolierten Punkten besteht. Dies folgt aber aus dem Identitätssatz 4.1.13. Nach Definition ist dann f auf dem Komplement eine holomorphe Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$. Die zweite Eigenschaft meromorpher Funktionen in Definition 4.1.14 folgt aus der Stetigkeit von f.

□

Bemerkung 4.1.18.
Sei X eine Riemannsche Fläche. Aus dem vorangegangenen Satz 4.1.17 folgt, dass der Identitätssatz 4.1.13 für holomorphe Funktionen $f : X \to \mathbb{P}_1$ einen Identitätssatz für meromorphe Funktionen auf X impliziert. Insbesondere hat eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, die nicht identisch Null ist, nur isolierte Nullstellen. Damit ist aber $1/f$ für f nicht identisch Null auch eine meromorphe Funktion und die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{M}(Y)$ ist für jede offene Teilmenge $Y \subset X$ sogar ein Körper, der $\mathbb{C}$ enthält.

4.2 Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen

Wir werden einige elementare Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen herleiten und zeigen, wie daraus uns schon bekannte Sätze der Funktionentheorie wie der Satz von Liouville 1.3.2 und der Fundamentalsatz der Algebra einfach folgen.

Wir beschreiben dazu die *lokale* Gestalt holomorpher Abbildungen.

Lemma 4.2.1.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die auf U keine Nullstelle hat, also $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.

1. *Dann existiert eine analytische Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so dass $f(z) = \exp(h(z))$ für alle $z \in U$ gilt.*
2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine auf U analytische Funktion $g_n : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = g_n(z)^n$ für alle $z \in U$.*

Beweis.
Aus $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ folgt, dass auch die Funktion $g : z \mapsto f'(z)/f(z)$ analytisch auf U ist. Da U einfach zusammenhängend ist haben f und g auf ganz U definierte komplexe Stammfunktionen $F, G : U \to \mathbb{C}$. Die Funktion $K : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(G(z))/f(z)$ ist damit ebenfalls analytisch auf U. Es gilt:

$$K'(z) = \exp(G(z)) \left(\frac{g(z)f(z) - f'(z)}{f^2(z)} \right) = 0 \qquad \text{für alle} \quad z \in U.$$

Damit folgt, dass eine Konstante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert, so dass $\exp(G(z)) = cf(z)$ gilt. Wir finden wegen der Surjketivität der komplexen Exponentialfunktion eine komplexe Zahl $\tilde{c}$ mit $c = \exp(\tilde{c})$ und definieren $h(z) = G(z) - \tilde{c}$. Dann gilt: $\exp(h(z)) = f(z)$. Setzen wir $g_n(z) = \exp(\frac{1}{n}h(z))$, so erhalten wir eine analytische Funktion $g_n : U \to \mathbb{C}$, für die gilt: $g_n^n(z) = f(z)$ für alle $z \in U$. □

Satz 4.2.2.
Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung. Sei $a \in X$ und $b := f(a) \in Y$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und Karten $\varphi : U \to V$ auf X beziehungsweise $\varphi' : U' \to V'$ auf Y mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Karten sind zentriert: $a \in U$, $\varphi(a) = 0$ sowie $b \in U'$, $\varphi'(b) = 0$.*
2. *Die Karten sind mit f kompatibel gewählt: $f(U) \subset U'$*

3. *Die Karten bringen die Abbildung f auf eine einfache Gestalt: für die Abbildung der offenen Menge $V \subset \mathbb{C}$*
$$F : \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V' \subset \mathbb{C}$$
gilt $F(z) = z^k$ für alle $z \in V \subset \mathbb{C}$.

Man beachte, dass hier f auf einer ganzen Umgebung von a auf eine einfache Form gebracht wird.

Beweis.

- Zunächst finden wir Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\varphi' : U' \to V'$ auf Y, so dass die Eigenschaften 1. und 2. beide erfüllt sind. Nach dem Identitätssatz 4.1.13 ist die Funktion
$$f_1 := \varphi' \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V' \subset \mathbb{C}$$
nicht konstant und es gilt $f_1(0) = 0$.

- Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass
$$f_1(z) = z^k g(z)$$
gilt, wobei g eine in V_1 holomorphe Funktion mit $g(0) \neq 0$ ist. In einer Umgebung von $0 \in V_1$ können wir nach Lemma 4.2.1 eine eine holomorphe Abbildung h finden mit $h^k = g$. Die Zuordnung
$$z \mapsto zh(z)$$
liefert eine Abbildung, die wegen
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z \cdot h(z))|_{z=0} = (zh'(z) + h(z))\,|_{z=0} = h(0) \neq 0$$
auf einer offenen Umgebung $V_2 \subset V_1$ der Null eine biholomorphe Abbildung
$$\alpha : V_2 \to V \ ,$$
auf eine offene Umgebung V der Null liefert. Wir schließen aus $\alpha(w) = wh(w)$, dass gilt
$$\alpha(w)^k = \ w^k g(w) \ .$$
Setzen wir $w = \alpha^{-1}(z)$, so finden wir die Identität
$$z^k = \ \alpha^{-1}(z)^k g(\alpha^{-1}(z)) \ .$$

- Sei $U := \varphi_1^{-1}(V_2) \subset U_1$. Wir ersetzen nun die Karte $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ durch die verbesserte Karte $\varphi : U \to V$ mit $\varphi := \alpha \circ \varphi_1|_U$. Für die Abbildung $F := \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ gilt dann nach Konstruktion
$$F(z) = \varphi' \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ \alpha^{-1}(z) = f_1 \circ \alpha^{-1}(z) = (\alpha^{-1}(z))^k g(\alpha^{-1}(z)) = z^k \ .$$

□

Bemerkung 4.2.3.
Wir wissen, dass die ganze Funktion $z \mapsto z^k$ *für jedes* $w \neq 0$ *genau* k *Urbilder mit* $z^j = w$ *hat. Die Zahl* k *in Satz 4.2.2 kann daher folgendermaßen charakterisiert werden: zu jeder Umgebung* U_0 *von* a *gibt es Umgebungen* $U \subset U_0$ *von* a *und* W *von* $b = f(a)$*, so dass für jeden Punkt* $y \in W \setminus \{b\}$ *die Menge* $f^{-1}(y) \cap U$ *genau* k *verschiedene Elemente hat.*

Dies zeigt, dass die Zahl k *in Satz 4.2.2 wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl lokaler Koordinaten auf* X *und* Y *abhängt. Man nennt* k *die Vielfachheit, mit der die Abbildung* f *den Wert* b *im Punkt* a *annimmt.*

Beispiele 4.2.4.

1. *Sei*
$$f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k$$
ein Polynom k*-ten Grades. Dann kann* f *nach Beispiel 4.1.16 als holomorphe Abbildung* $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ *mit* $f(\infty) = \infty$ *angesehen werden. Durch Benutzung der Karte*
$$\varphi(z) = 1/z \text{ für } z \neq 0, \infty \qquad \text{und } \varphi(\infty) = 0$$
um ∞ *findet man*
$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \frac{1}{z^{-k} + c_1 z^{-k+1} + \ldots + c_k} = z^k \cdot \left(1 + c_1 z + \ldots + c_k z^k\right)^{-1} .$$
Der zweite Faktor ist offenbar eine Funktion, die in einer Umgebung von 0 *holomorph ist und die in Null nicht den Wert Null annimmt. Es folgt, dass der Wert* ∞ *an der Stelle* ∞ *mit der Vielfachheit* k *angenommen wird.*

2. *Wir wissen schon, dass die Weierstraß'sche* $\wp$*-Funktion zu einem Gitter die drei Halbwerte* e_1, e_2 *und* e_3 *sowie den Wert* ∞ *mit Vielfachheit* 2 *annimt.*

Korollar 4.2.5.
Seien X, Y *Riemannsche Flächen und* $f : X \to Y$ *eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist* f *offen, d.h. das Bild jeder offenen Menge ist offen.*

Beweis.
Aus Satz 4.2.2 folgt unmittelbar: ist U Umgebung eines Punktes $a \in X$, so ist $f(U)$ Umgebung des Punktes $f(a)$. Daraus ergibt sich die Offenheit der Abbildung. □

Korollar 4.2.6.
Seien X, Y *Riemannsche Flächen und* $f : X \to Y$ *eine* injektive *holomorphe Abbildung. Dann liefert* f *eine biholomorphe Abbildung von* X *auf* $f(X)$*.*

Beweis.
Ist f injektiv, so muss in der lokalen Beschreibung von Satz 4.2.2 für alle Punkte $k = 1$ sein. In lokalen Koordinaten ist f also die Identität. Deshalb ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(X) \to X$ auch holomorph. □

Korollar 4.2.7 (Maximumsprinzip)**.**
Sei X *eine Riemannsche Fläche und* $f : X \to \mathbb{C}$ *eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann nimmt* f *das Maximum seines Betrags nicht an.*

Beweis.
Angenommen, es gebe einen Punkt $a \in X$ mit

$$|f(a)| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} =: R$$

Es gilt dann

$$f(X) \subset \overline{D_R(0)}$$

Da $f(X)$ nach Korollar 4.2.5 offen ist, liegt $f(X)$ ganz im Innern der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_R(0)}$. Dies ist im Widerspruch zu $f(a) \in \partial\overline{D_R(0)}$. □

Satz 4.2.8.
Seien X, Y Riemannsche Flächen, X sei kompakt *und $f : X \to Y$ eine nicht-konstante* holomorphe *Abbildung. Dann ist Y kompakt und f surjektiv.*

Beweis.
Nach Korollar 4.2.5 ist $f(X)$ offen. Da X kompakt sein soll und f insbesondere stetig ist, ist $f(X)$ kompakt und somit insbesondere abgeschlossen. Da in einem zusammenhängenden Raum die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen die leere Menge und der gesamte Raum sind, folgt $f(X) = Y$. Also ist f surjektiv und Y kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums. □

Korollar 4.2.9.
Auf einer kompakten *Riemannschen Fläche X ist jede holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konstant.*

Beweis.
Dies folgt aus Satz 4.2.8, weil $\mathbb{C}$ nicht kompakt ist. □

Dieser Satz enthält natürlich als Spezialfall, wenn X ein Torus ist, den ersten Satz von Liouville 2.1.4. Auf kompakten Riemannschen Flächen gibt es also nur wenige global definierte holomorphe Funktionen. Wir untersuchen nun im speziellen Fall der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$ die Situation für meromorphe Funktionen, bei denen wir Pole zulassen:

Korollar 4.2.10.
Jede meromorphe Funktion f auf $\mathbb{P}_1$ ist eine rationale Funktion, d.h. Quotient zweier polynomialer Funktionen.

Beweis.
Die Funktion f hat nur endlich viele Pole. Denn andernfalls hätten die Polstellen wegen der Kompaktheit von $\mathbb{P}_1$ einen Häufungspunkt, und f müsste nach dem Identitätssatz 4.1.13 konstant gleich ∞ sein. Wir wollen zunächst annehmen, dass in ∞ kein Pol von f liegt.

Seien also $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$ die Polstellen von f und

$$h_\nu(z) := \sum_{j=-k_\nu}^{-1} c_{\nu j}(z - a_\nu)^j$$

für $\nu = 1, \dots n$ der Hauptteil von f in a_ν. Die Funktionen h_ν sind außerhalb eines Kreisrings um a_ν holomorph. Daher ist die Funktion

$$g := f - (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

auf ganz $\mathbb{P}_1$ holomorph, also nach Korollar 4.2.9 konstant. Daraus folgt durch Auflösen nach f, dass f rational ist.

Hat f einen Pol an der Stelle ∞, gilt also $\omega(f;\infty) < 0$, so hat die Funktion $1/f$ an der Stelle ∞ eine Nullstelle, da $\omega(1/f;\infty) = -\omega(f;\infty) > 0$ gilt. Wir finden daher, dass $1/f$ eine rationale Funktion ist; somit ist auch f eine rationale Funktion. □

Wir bringen noch einmal einen Beweis des Satzes von Liouville 1.3.2

Satz 4.2.11 (Satz von Liouville)**.**
Jede beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis.
Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 4.1.10 lässt sich f zu einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{C}$ fortsetzen, die nach Korollar 4.2.9 konstant ist. □

Wir beweisen auch noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra:

Satz 4.2.12 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Sei $n \geq 1$ und

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

ein Polynom mit Koeffizienten $c_\nu \in \mathbb{C}$. Dann gibt es wenigstens ein $a \in \mathbb{C}$ mit $f(a) = 0$.

Beweis.
Das Polynom f lässt sich nach Beispiel 4.1.16 als meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}_1$ und somit nach Satz 4.1.17 als holomorphe Abbildung $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit $f(\infty) = \infty$ auffassen. Nach Satz 4.2.8 ist diese Abbildung surjektiv, also ist $0 \in f(\mathbb{C})$. □

Wir wollen auch noch einmal aus dieser Perspektive elliptische Funktionen betrachten:

Definition 4.2.13
Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Vektoren und $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ das von ω_1, ω_2 aufgespannte Gitter in der komplexen Ebene. Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ heisst elliptisch oder doppeltperiodisch bezüglich Γ, falls

$$f(z) = f(z + \omega) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \omega \in \Gamma$$

gilt.

Satz 4.2.14.

1. *Jede doppeltperiodische* holomorphe *Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant. Dies ist natürlich der 1. Satz von Liouville, Satz 2.1.4.*
2. *Jede nichtkonstante doppeltperiodische* meromorphe *Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ nimmt jeden Wert $c \in \mathbb{P}_1$ an. Dies ist natürlich in der Aussage des 3. Satzes von Liouville, Theorem 2.1.8 enthalten.*

Beweis.

- Sei $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Quotientenabbildung aus Beispiel 4.1.7 4. Dann induziert die doppeltperiodische meromorphe Funktion f eine Funktion

$$F : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$$

  mit $f = F \circ \pi$. Aus der Definition der komplexen Struktur von $\mathbb{C}/\Gamma$ in Beispiel 4.1.7 4. folgt unmittelbar, dass F eine meromorphe Funktion auf dem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ ist.

- Geht man umgekehrt von einer meromorphen Funktion $F : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$ aus, so ist die Komposition $f = F \circ \pi : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ eine bezüglich dem Gitter Γ doppeltperiodische meromorphe Funktion. Die meromorphen Funktionen auf dem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den bezüglich Γ doppeltperiodischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

- Da $\mathbb{C}/\Gamma$ kompakt ist, folgt der erste Teil des Satzes aus Korollar 4.2.9 und der zweite Teil, da meromorphe Funktionen nach Satz 4.1.17 holomorphe Funktionen $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$ sind, aus der Surjektivitätsaussage in Satz 4.2.8

□

4.3 Verzweigte und unverzweigte Überlagerungen

Die nicht-konstanten holomorphen Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen sind sehr spezielle Abbildungen der zu Grunde liegenden topologischen Räume.

Definition 4.3.1

1. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt diskret, wenn das Urbild $p^{-1}(x)$ jedes Punktes $x \in X$ eine diskrete Teilmenge von Y ist.*

2. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt Überlagerung(sabbildung) falls sie stetig, offen und diskret ist.*

3. *Ist $y \in Y$ und $x := p(y)$, so sagen wir, der Punkt y liege über x und der Punkt x sei der Grundpunkt oder Spurpunkt von y.*

4. *Sind $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$ zwei Überlagerungen von X, so nennt man eine Abbildung $f : Y \to Z$ spurtreu, wenn $p = q \circ f$ gilt. Das bedeutet gerade, dass ein Punkt $y \in Y$, der über $x \in X$ liegt, auf einen Punkt $z \in Z$ abgebildet wird, der ebenfalls über x liegt.*

Satz 4.3.2.
Seien X und Y Riemannsche Flächen und $p : Y \to X$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist p eine Überlagerungsabbildung.

Beweis.
Die Abbildung p ist natürlich stetig und nach Korollar 4.2.5 auch offen. Wäre das Urbild eines Punktes $a \in X$ nicht diskret, so müsste p nach dem Identitätssatz 4.1.13 konstant gleich a sein. $\square$

Wir führen folgende Sprechweisen ein:

Definition 4.3.3
Sei $p : Y \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung.

1. *Dann nennt man Y ein <u>Gebiet</u> über X.*

2. *Eine holomorphe (bzw. meromorphe) Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ (bzw. $f : Y \to \mathbb{P}_1$) bezeichnet man als <u>mehrdeutige</u> holomorphe (meromorphe) <u>Funktion</u> auf X.*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Ist $x \in X$ und $p^{-1}(x) = \{y_j \mid j \in J\}$, so sind $f(y_j)$ die verschiedenen Werte dieser mehrdeutigen Funktion über dem Punkt x.

Beispiel 4.3.4.
Sei etwa $Y = \mathbb{C}$ und $X = \mathbb{C}^*$ und $p = \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Dann entspricht der identischen Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der mehrdeutige Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\log"'] & \end{tikzcd}$$

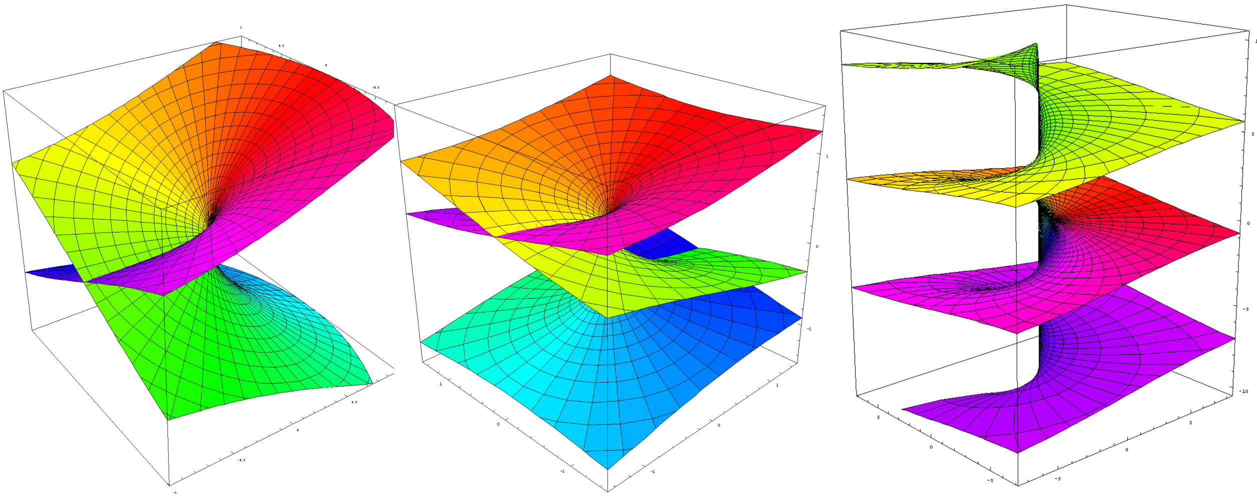
Denn für $b \in \mathbb{C}^*$ besteht die Menge $\exp^{-1}(b)$ genau aus den verschiedenen Werten des Logarithmus von b.

Als anderes Beispiel betrachten wir $X = Y = \mathbb{C}$ und

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array} .$$

Dies beschreibt die komplexe n-te Wurzel, denn ür $b \in \mathbb{C}$ besteht die Menge $p^{-1}(b)$ genau aus den verschiedenen Werten der n-ten Wurzel von b.

In Bildern: wir zeigen die Überlagerungsflächen für $z \mapsto z^2$, $z \mapsto z^2$ und $z \mapsto \exp(z)$



Definition 4.3.5
Seien X, Y topologische Räume und $p : Y \to X$ eine Überlagerung.

1. *Ein Punkt $y \in Y$ heißt Windungspunkt (englisch: ramification point) von p, wenn es keine Umgebung V von y gibt, für die die Einschränkung von p injektiv ist.*

2. *Eine Abbildung p heißt unverzweigt , falls sie keine Windungspunkte besitzt.*

Satz 4.3.6.
Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ ist genau dann eine unverzweigte Überlagerung, wenn p lokal topologisch ist, d.h. wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung besitzt, die durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge U von X abgebildet wird. Man sagt dann auch p sei ein lokaler Homöomorphismus.

Beweis.

- Sei $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung und $y \in Y$ beliebig. Da y kein Windungspunkt ist, gibt es eine offene Umgebung V von y, so dass $p|V$ injektiv ist. Da p stetig und offen ist, bildet p die offene Menge V homöomorph auf die offene Menge $U := p(V)$ ab.

- Sei umgekehrt $p : Y \to X$ als lokal topologisch vorausgesetzt. Dann ist natürlich p stetig und offen. Wir müssen zeigen, dass p auch diskret ist. Sei $y \in p^{-1}(x)$ und V eine offene Umgebung von y, die durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge von X abgebildet wird. Dann ist $V \cap p^{-1}(x) = \{y\}$ und daher die Abbildung diskret.

$\square$

Beispiele 4.3.7.

1. *Sei k eine natürliche Zahl ≥ 2 und die holomorphe Überlagerungsabbildung $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $p_k(z) = z^k$ definiert. Dann ist 0 der einzige Verzweigungspunkt von p_k. Die Abbildung $p_k|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist unverzweigt.*

2. *Setzt man die Abbildung zu einer Abbildung $p_k : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ durch $p_k(\infty) = \infty$ fort, so ist ∞ ein weiterer Verzweigungspunkt.*

3. *Sei $p: Y \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, $y \in Y$ und $x := p(y)$. Dann ist y Verzweigungspunkt von p genau dann, wenn die Abbildung p den Wert x in y mit einer Vielfachheit $k \geq 2$ annimmt. Denn nach Satz 4.2.2 verhält sich dann p lokal um y wie die Abbildung p_k um den Nullpunkt.*

Satz 4.3.8.
Sei X eine Riemannsche Fläche, Y ein Hausdorff-Raum und $p: Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerungsabbildung. Dann gibt es genau eine komplexe Struktur auf Y, so dass p holomorph wird.

Beweis.
Dazu setzen wir geeignet gewählte komplexe Karten $\varphi: U \to V$ von X mittels eines lokalen Hömömorphismus $p_{\tilde{U}}: \tilde{U} \to U$ zu einer Karte $\varphi \circ p$ von Y mit Definitionsgebiet $\tilde{U} \subset Y$ fort und erhalten so einen komplexen Atlas von Y. □

Definition 4.3.9
Seien X, Y, Z topologische Räume, $p: Y \to X$ eine Überlagerung und $f: Z \to X$ eine stetige Abbildung. Unter einer <u>Liftung</u> von f bezüglich p versteht man eine stetige Abbildung $g: Z \to Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Die folgenden Sätze aus der Topologie sind für uns wesentlich. Für den Beweis verweisen wir auf Kapitel 4 des Buchs von Forster.

Satz 4.3.10.

1. *(Eindeutigkeit der Liftung)*
   Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p: Y \to X$ eine unverzweigte *Überlagerung. Sei Z ein* zusammenhängender *topologischer Raum und $f: Z \to X$ eine stetige Abbildung. Sind dann $g_1, g_2: Z \to Y$ zwei Liftungen von f und gilt $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ für einen Punkt $z_0 \in Z$, so sind die beiden Abbildungen gleich, $g_1 = g_2$.*

2. *(Holomorphie der Liftung)*
   Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen und $p: Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte *Überlagerung. Sei $f: Z \to X$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist jede Liftung $g: Z \to Y$ von f holomorph.*

   Insbesondere sind spurtreue stetige Abbildungen $f: Y \to Z$ zwischen unverzweigten holomorphen Überlagerungen $p: Y \to X$ und $q: Z \to X$ holomorph. Denn f können wir auch als Liftung von p bezüglich q ansehen:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Besonders wichtig für uns wird die Liftung von Kurven $\gamma : [0,1] \to X$ sein. Es ist nach Satz 4.3.10.1 klar, dass eine solche Liftung, wenn sie existiert, eindeutig durch die Liftung des Anfangspunktes bestimmt ist.

Satz 4.3.11 (Liftung homotoper Kurven)**.**
Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung. Seien $a, b \in X$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ zwei Kurven mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Sei

$$\varphi : [0,1] \times J \to X$$

mit $J = [0,1]$ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1, die den Anfangs- und Endpunkt festlässt.

Sei $\hat{a} \in Y$ mit $p(\hat{a}) = a$. Jede Kurve $\varphi(-, s) : [0,1] \to X$ in X lasse sich zu einer Kurve $\hat{\varphi}(-, s) : [0,1] \to Y$ in Y mit Anfangspunkt $\hat{a}$ liften.

Dann haben die Kurven $\hat{\gamma}_0 = \hat{\varphi}(-, 0)$ und $\hat{\gamma}_1 = \hat{\varphi}(-, 1)$ denselben Endpunkt und sind homotop.

Definition 4.3.12
Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung, wenn gilt:
Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U, so dass sich das Urbild $p^{-1}(U)$ darstellen lässt als Vereinigung

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

paarweise disjunkter offener Teilmengen von Y, wobei alle Abbildungen $p|_{V_j} : V_j \to U$ Homöomorphismen sind.

Bemerkungen 4.3.13.

1. *Es ist klar, dass dann p insbesondere lokal topologisch, also nach Satz 4.3.6 unverzweigt im Sinne von Definition 4.3.5.2 ist.*

   Die kanonische Einbettung $D_1(0) \hookrightarrow \mathbb{C}$ der offenen Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist unverzweigt, aber nicht unbegrenzt: für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ existiert keine offene Umgebung mit der geforderten Eigenschaft.

2. *In der Topologie versteht man unter einer Überlagerung meist das, was wir hier als unverzweigte unbegrenzte Überlagerung bezeichnen. In der Funktionentheorie (und auch in der Zahlentheorie) sind insbesondere* verzweigte *Überlagerungen jedoch unabdingbar.*

Die Bedeutung des Begriffs macht der folgende Satz deutlich:

Satz 4.3.14.
Jede unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsabbildung $p : Y \to X$ topologischer Räume X, Y besitzt die sogenannte Kurvenliftungseigenschaft: zu jeder Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ in X und jedem Punkt $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = \gamma(0)$ gibt es einen Lift $\hat{\gamma} : [0,1] \to Y$ von γ mit $\hat{\gamma}(0) = y_0$.

Daraus schließen wir:

Satz 4.3.15.
Seien X, Y Hausdorff-Räume, X wegzusammenhängend und $p : Y \to X$ eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung. Dann sind für je zwei Punkte $x_0 \in X$ und $x_1 \in X$ die Mengen $p^{-1}(x_0)$ und $p^{-1}(x_1)$ gleichmächtig.

Man bezeichnet die Mächtigkeit von $p^{-1}(x)$ für $x \in X$ als die Blätterzahl der Überlagerung. Sie kann endlich oder unendlich sein. Die Blätterzahl ist für die Überlagerung $p_k(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gleich k, für die Überlagerung zum Logarithmus $p(z) = \exp(z)$ unendlich.

Beweis.
Wir konstruieren folgendermaßen eine Bijektion $\phi : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$: Weil X wegzusammenhängend sein soll, können wir eine Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ wählen, die x_0 und x_1 verbindet. Für jede Liftung $\hat{\gamma}_y$ von γ mit Anfangspunkt $y \in p^{-1}(x_0)$ erhalten wir einen Endpunkt $\hat{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_1)$. Wir setzen dann $\varphi(y) = \hat{\gamma}_y(1)$. Aus der Eindeutigkeit der Liftung folgt leicht die Bijektivität von ϕ. □

Man beachte, dass die so konstruierte Abbildung ϕ von der Wahl der Kurve γ abhängt. Man kann im allgemeinen die Blätter einer Überlagerung nicht global "durchnumerieren".

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung *unbegrenzter* Überlagerungen:

Satz 4.3.16.
Ist X überdies eine Mannigfaltigkeit, Y ein Hausdorff-Raum und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung mit der Kurvenliftungseigenschaft. Dann ist p unbegrenzt.

Wir spezialisieren nun unsere Betrachtung auf Situationen, wo uns durch Kompaktheitsargumente zusätzliche Hilfsmittel zur Verfügung stehen.

Definition 4.3.17

1. *Ein lokal-kompakter topologischer Raum ist ein Hausdorff-Raum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

2. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei lokal-kompakten Räumen heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist.*

Bemerkungen 4.3.18.

1. *Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen und insbesondere Riemannsche Flächen sind lokal kompakt.*

2. *In einem lokal-kompakten Raum ist eine Teilmenge genau dann abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit jeder kompakten Menge kompakt ist.*

3. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei lokal kompakten topologischen Räumen. Ist X kompakt, so ist f stets eigentlich. Denn das Urbild einer kompakten Menge $K \subset Y$ ist in X abgeschlossen, da f stetig ist, also nach 1. kompakt.*

4. *Ebenso schließt man leicht, dass jede eigentliche Abbildung auch abgeschlossen ist: das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*

Lemma 4.3.19.
Seien X, Y lokal-kompakte Räume und $p : Y \to X$ eine eigentliche Überlagerungsabbildung. Dann gilt:

1. *Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Menge $p^{-1}(x)$ endlich.*

2. *Sei $x \in X$ und V eine Umgebung der Menge $p^{-1}(x)$. (Beachte, dass V nicht unbedingt zusammenhängend ist.) Dann existiert eine Umgebung U von x mit $p^{-1}(U) \subset V$.*

3. *Sei X zusammenhängend und Y nicht-leer. Dann ist p surjektiv.*

Beweis.

1. Die Menge $p^{-1}(x)$ ist eine kompakte und diskrete Teilmenge von Y und somit endlich.
2. Nachdem wir gegebenenfalls V verkleinert haben, dürfen wir annehmen, dass V offen, also $Y \setminus V$ abgeschlossen ist. Da p als eigentliche Abbildung abgeschlossen ist, ist auch $p(Y \setminus V) =: A$ in X abgeschlossen und es gilt $x \notin A$. Daher ist $U := X \setminus A$ eine offene Umgebung von x mit $p^{-1}(U) \subset V$.
3. Die Menge $p(Y)$ ist offen und abgeschlossen sowie nicht leer. Da X zusammenhängend ist, folgt $p(Y) = X$.

□

Wir brauchen noch einen Satz aus der mengentheoretischen Topologie:

Satz 4.3.20.
Seien X, Y lokal-kompakte Räume und $p : Y \to X$ eine eigentliche, unverzweigte Überlagerungsabbildung. Dann ist p eine unbegrenzte Überlagerung.

Beweis.
Sei $x \in X$ beliebig und
$$p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots y_n\}\ .$$
Da p unverzweigt ist, gibt es zu jedem $j = 1, \ldots, n$ eine offene Umgebung W_j von y_j und eine Umgebung U_j von x, so dass
$$p|_{W_j} :\ W_j \to U_j$$
ein Homöomorphismus ist. Nach Verkleinerung können wir annehmen, dass die Umgebungen W_j paarweise disjunkt sind. Ihre Vereinigung $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ ist dann eine Umgebung von $p^{-1}(x)$. Nach Lemma 4.3.19 gibt es eine offene Umgebung U von x mit $p^{-1}(U) \subset W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$. Die Mengen $V_j := W_j \cap p^{-1}(U)$ sind disjunkte offene Mengen mit $p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ und alle Abbildungen $p :\ V_j \to U$ sind Homöomorphismen.

□

Für später halten wir fest:

Definition 4.3.21
Seien X, Y zusammenhängende topologische Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung. Dann heißt p <u>universelle Überlagerung</u>, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:

Zu jeder zusammenhängenden, unverzweigten unbegrenzten Überlagerung $q : Z \to X$ und jeder Wahl von Punkten $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ mit $p(y_0) = q(z_0) \in X$ gibt es genau eine spurtreue Abbildung $f : Y \to Z$ mit $f(y_0) = z_0$.

Bemerkungen 4.3.22.

1. *Man kann zeigen, dass ein zusammenhängender topologischer Raum bis auf eindeutige Isomorphie höchstens eine universelle Überlagerung besitzt.*

2. *Ist $p : Y \to X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung und Y einfach zusammenhängend, so ist p die universelle Überlagerung.*

3. *Ist X ein zusammenhängende Mannigfaltigkeit, etwa eine Riemannsche Fläche, so existierte eine universelle Überlagerung.*

Betrachtung 4.3.23.

1. *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung. Aus Satz 4.2.2 folgt, dass die Menge $A \subset X$ der Windungspunkte abgeschlossen und diskret ist. Da f eigentlich ist, ist auch $B := f(A)$ abgeschlossen und diskret. Man nennt $B \subset Y$ die Menge der kritischen Werte oder Verzweigungspunkte von f.*

2. *Wir nehmen nun diese Menge aus der Betrachtung heraus. Sei $Y' := Y \setminus B$ und $X' := X \setminus f^{-1}(B)$. Dann ist die Einschränkung $f|_{X'} : X' \to Y'$ eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung. Sie ist nach Satz 4.3.16 unbegrenzt. Daher ist nach Satz 4.3.15 die Blätterzahl konstant und nach Lemma 4.3.19.1 endlich.*

3. *Dies bedeutet, dass jeder Wert $c \in Y'$ genau n-mal angenommen wird. Um diese Aussage auch auf die kritischen Werte $b \in B$ ausdehnen zu können, müssen wir die Vielfachheit im Sinne von Bemerkung 4.2.3 berücksichtigen.*

   Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $v(f, x)$ die Vielfachheit mit der f in x den Wert $f(x)$ annimmt. Wir sagen, dass f auf der Riemannschen Fläche X den Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet m-mal annimmt, falls

$$m = \sum_{x \in f^{-1}(c)} v(f, x)$$

   gilt.

Satz 4.3.24.
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so dass f jeden *Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet n-mal annimmt.*

Beweis.
Sei n die Blätterzahl der unverzweigten Überlagerung $f|_{X'} : X' \to Y'$. Sei $b \in B$ ein kritischer Wert und sei

$$p^{-1}(b) = \{x_1, x_2, \ldots x_r\} \ .$$

Sei $k_j := v(f, x_j)$ die Vielfachheit von f in x_j. Nach Satz 4.2.2 finden wir disjunkte Umgebungen U_j von x_j und V_j von b, so dass für jedes $c \in V_j \setminus \{b\}$ die Menge $p^{-1}(c) \cap U_j$ aus genau k_j Punkten besteht.

Nach Lemma 4.3.19. 2 können wir eine Umgebung $V \subset V_1 \cap \ldots \cap V_r$ von b mit $p^{-1}(V) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r$ finden. Für jeden Punkt $c \in V \cap Y'$ besteht dann $p^{-1}(c)$ aus $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ Punkten. Andererseits ist für $c \in Y'$ die Mächtigkeit $|f^{-1}(c)| = n$, gleich der Blätterzahl. Daraus folgt $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. □

Korollar 4.3.25.
Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X hat jede nicht-konstante meromorphe Funktion $f : X \to \mathbb{P}_1$ ebenso viele Nullstellen wie Pole, jeweils mit Vielfachheit gerechnet.

Für den Fall, wenn X eine elliptische Kurve ist, erhalten wir als Spezialfall den 3. Satz von Liouville, Theorem 2.1.8.

Beweis.
Wegen der Kompaktheit von X ist f nach Bemerkung 4.3.18.2 eigentlich, so dass die Aussage aus Satz 4.3.24 folgt. □

Für den Fall, wenn X eine elliptische Kurve ist, erhalten wir als Spezialfall den 3. Satz von Liouville, Theorem 2.1.8.

Korollar 4.3.26.
Ein Polynom n-ten Grades

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n \in \mathbb{C}[z]$$

hat mit Vielfachheit gerechnet genau n Nullstellen.

Beweis.
Wir fassen wie in Beispiel 4.2.4 die Abbildung als eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ auf, die nach Beispiel 4.2.4.2 den Wert in ∞ mit Vielfachheit n annimmt. □

4.4 Garben und analytische Fortsetzungen

In der Funktionentheorie hat man es häufig mit Funktionen mit wechselnden Definitionsbereichen zu tun. Um diese Situation zu behandeln, führen wir die folgenden Begriffe ein:

Definition 4.4.1
Sei X ein topologischer Raum und Ω das System seiner offenen Teilmengen.

1. *Eine Prägarbe von Mengen bzw. abelscher Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathcal{F}, \rho)$ bestehend aus*

   (a) *Einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \Omega}$ von Mengen bzw. von abelschen Gruppen.*

   (b) *Einer Familie von Abbildungen bzw. von Gruppenhomomorphismen: für $V \subset U$, mit U und V offen in X haben wir eine Abbildung bzw. einen Gruppenhomomorphismus*

   $$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

   mit den beiden Eigenschaften

   i. *$\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ für alle $U \in \Omega$*

   ii. *Für $W \subset V \subset U$ gilt*

   $$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U \ .$$

   Wir schreiben auch $f|_V = \rho_V^U(f)$ für $f \in \mathcal{F}(U)$ und nennen die Morphismen ρ_V^U Beschränkungshomomorphismen.

2. *Eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X heißt Garbe, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Familie offener Teilmengen $U_i \subset U$, $i \in I$, mit $U = \cup_{i \in I} U_i$ die beiden Garbenaxiome erfüllt sind:*

   (a) *Für $f, g \in \mathcal{F}(U)$ folgt aus $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$ die Gleichheit $f = g$.*

(b) *Seien Elemente* $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *für alle* $i \in I$ *vorgegeben mit*

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{für alle Paare } i, j \in I \ .$$

Dann existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ *mit* $f|_{U_i} = f_i$.

Beispiele 4.4.2.

1. *Es ist klar, dass man auch Garben mit Werten in anderen Kategorien, etwa in der Kategorie von komplexen Vektorräumen oder in der Kategorie von Ringen betrachten kann.*

2. *Sei* X *ein beliebiger topologischer Raum. Für eine offene Teilmenge* $U \subset X$ *sei* $\mathcal{C}(U)$ *der Vektorraum aller stetigen Funktionen* $f : U \to \mathbb{C}$ *und* ρ_V^U *die gewöhnliche Beschränkungsabbildung. Dann ist* $(\mathcal{C}, \rho)$ *eine Garbe von komplexen Vektorräumen auf* X.

3. *Sei* X *Riemannsche Fläche und* $\mathcal{O}(U)$ *der Ring der holomorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge* $U \subset X$*. Diese Ringe bilden, wiederum mit der gewöhnlichen Beschränkungsabbildung, eine Ringgarbe* $\mathcal{O}$ *auf* X*. Ähnlich definiert man die Garbe* $\mathcal{M}$ *der meromorphen Funktionen auf* X.

Definition 4.4.3

1. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X und $a \in X$ ein Punkt. Auf der disjunkten Vereinigung
$$\bigsqcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U)$$
über alle offenen Umgebungen U von a führen wir die folgende Äquivalenzrelation $\sim_a$ ein. Für $f \in \mathcal{F}(U)$ und $g \in \mathcal{F}(V)$ setzen wir $f \sim_a g$ genau dann, wenn eine offene Menge W mit $a \in W \subset U \cap V$ existiert, so dass $f|_W = g|_W$. Zwei Elemente sind also genau dann äquivalent, wenn ihr Bild unter der Einschränkungsabbildung auf eine Verfeinerung $W \subset U \cap V$ übereinstimmt. Man prüft leicht nach, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt.

2. Die Menge $\mathcal{F}_a$ aller Äquivalenzklassen, der sogenannte <u>induktive Limes</u>,
$$\mathcal{F}_a := \lim_{U \ni a} \mathcal{F}(U) = \bigsqcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U) / \sim_a$$
heißt der <u>Halm</u> der Prägarbe $\mathcal{F}$ im Punkt a. Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen (Vektorräumen, Ringen,...), so wird auch der Halm $\mathcal{F}_a$ für jedes $a \in X$ durch repräsentantenweise Verknüpfung eine abelsche Gruppe (ein Vektorraum, ein Ring,...).

3. Für eine offene Umgebung U von a sei
$$\rho_a : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_a$$
die Abbildung, die $f \in \mathcal{F}(U)$ seine Äquivalenzklasse $\rho(f)$ zuordnet. Diese heißt der <u>Keim</u> von f in a. (Der Keim ist also ein Element des Halms.)

Beispiel 4.4.4.
Als Beispiel betrachten wir die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $X \subset \mathbb{C}$. Sei $a \in X$. Ein holomorpher Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_a$ wird durch eine holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung von a repräsentiert, lässt sich also in einer Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ mit positivem Konvergenzradius entwickeln.

Zwei holomorphe Funktionen, die auf Umgebungen $a \in U_i \subset X$ definiert sind, stimmen nach dem Eindeutigkeitssatz Korollar 1.1.7 genau dann überein, wenn sie dieselbe Potenzreihenentwicklung um a besitzen. Es gibt daher einen Ringisomorphismus zwischen dem Halm $\mathcal{O}_a$ und dem Ring $\mathbb{C}\{z-a\}$ aller konvergenten Potenzreihen in $z-a$ mit komplexen Koeffizienten. Analog ist der Ring $\mathcal{M}_a$ der meromorphen Funktionskeime in a isomorph zum Ring aller konvergenten Laurent-Reihen

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu \ ,$$

$k \in \mathbb{Z}$ und $c_\nu \in \mathbb{C}$, mit endlichem Hauptteil.

Für einen holomorphen Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ist der Funktionswert $\varphi(a) = c_0$ wohldefiniert, erlaubt aber natürlich nicht, den Funktionskeim festzulegen.

Lemma 4.4.5.
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Element $f \in \mathcal{F}(U)$ ist genau dann gleich Null, wenn alle Keime $\rho_x(f) \in \mathcal{F}_x$ für alle $x \in U$ verschwinden.

Beweis.
Dies folgt unmittelbar aus dem ersten Garbenaxiom. □

Definition 4.4.6
Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Sei

$$|\mathcal{F}| := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

die disjunkte Vereinigung aller Halme der Garbe $\mathcal{F}$. Mit

$$p : |\mathcal{F}| \to X$$

bezeichnen wir die Abbildung, die einem Element $\varphi \in \mathcal{F}_x$ den Punkt x zuordnet.

Das Urbild $p^{-1}(x)$ eine Punktes $x \in X$ in $|\mathcal{F}|$ kann riesig sein: im Fall der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen ist es gleich dem Ring der konvergenten Potenzreihen.

Wir machen $|\mathcal{F}|$ zum topologischen Raum, indem wir für jede offene Teilmenge $U \subset X$ und jedes $f \in \mathcal{F}(U)$ die Menge

$$[U, f] := \{\rho_x(f) \mid x \in U\} \subset |\mathcal{F}|$$

als Basis einer Topologie erklären. Wir nehmen uns also eine auf einer offenen Menge U definierte Funktion f her und betrachten dann alle davon erzeugten Funktionskeime in allen Halmen über U.

Diese Mengen haben in der Tat die beiden definierenden Eigenschaften einer Basis:

1. *Jedes Element $\varphi \in |\mathcal{F}|$ ist in wenigstens einem $[U, f]$ enthalten. Dies ist eine triviale Folge der Definition eines Funktionskeims: wir erhalten U und $f \in \mathcal{F}(U)$ durch die Wahl eines Repräsentanten des Keims φ.*

2. *Sei $\varphi \in [U,f] \cap [V,g]$, so müssen wir zeigen, dass ein $[W,h]$ in der Basis existiert mit $\varphi \in [W,h] \subset [U,f] \cap [V,g]$.*

   Dazu sei $p(\varphi) =: x \in X$. Dann ist $x \in U \cap V$ und $\varphi = \rho_x(f) = \rho_x(g)$. Nach der Definition der Äquivalenzrelation für Keime existiert eine offene Umgebung $W \subset U \cap V$ von x mit $f|_W = g|_W =: h$. Daraus folgt $\varphi \in [W,h] \subset [U,f] \cap [V,g]$.

Wir definieren die Topologie auf $|\mathcal{F}|$ dadurch, dass die offenen Mengen genau die Vereinigungen von Mengen aus der Basis sind. Der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ heißt der einer Prägarbe zugeordnete Überlagerungsraum.

Bemerkungen 4.4.7.

1. *Die Projektion $p : |\mathcal{F}| \to X$ ist lokal topologisch, d.h. eine unverzweigte Überlagerung.*

   Denn sei $\varphi \in |\mathcal{F}|$ und $p(\varphi) = x$. Es gibt dann ein $[U,f]$ mit $\varphi \in [U,f]$. Dies ist nach Definition der Topologie eine offene Umgebung von φ und U ist eine offene Umgebung von x. Die Projektionsabbildung $[U,f] \to U$, die einem Keim den Fusspunkt zuordnet ist bijektiv und offenbar stetig und offen, also ein lokaler Homöomorphismus.

2. *Man sagt, eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X genüge dem Identitätssatz, wenn gilt: ist $Y \subset X$ ein Gebiet und sind $f, g \in \mathcal{F}(Y)$ Elemente, deren Keime $\rho_a(f)$ und $\rho_a(g)$ in einem Punkt $a \in Y$ übereinstimmen, so gilt $f = g$.*

   Dies gilt für die Garben $\mathcal{O}$ der holomorphen bzw. $\mathcal{M}$ der meromorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X nach Satz 4.1.13 bzw. Bemerkung 4.1.18. Dies gilt offensichtlich nicht für die Garbe der glatten Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit.

3. *Sei X ein lokal zusammenhängender Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, die dem Identitätssatz genügt. Dann ist der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ Hausdorffsch.*

   Für zwei verschiedene Punkte $\varphi_1, \varphi_2 \in |\mathcal{F}|$ sind punktfremde Umgebungen zu finden.

   - *Ist $p(\varphi_1) \neq p(\varphi_2)$, so existieren punktfremde Umgebungen U_1 und U_2 dieser Punkte in X, da X Hausdorffsch ist. Dann sind $p^{-1}(U_1)$ und $p^{-1}(U_2)$ die gesuchten punktfremden Umgebungen von φ_1 und φ_2.*
   - *Sei $p(\varphi_1) = p(\varphi_2)$ und werden die Keime φ_i lokal durch zwei verschiedene Funktionen $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ repräsentiert. Indem wir zu einer Verfeinerung übergehen, können wir $U_1 = U_2 = U$ annehmen. Die offenen Umgebungen $[U, f_i]$ von φ_i sind dann disjunkt, denn für $\psi \in [U, f_1] \cap [U, f_2]$ gälte mit $y = p(\psi)$ die Gleichheit*

     $$\psi = \rho_y(f_1) \ = \rho_y(f_2)$$

     der Keime in y. Aus dem Identitätssatz folgt dann $f_1 = f_2$, Widerspruch.

Wir kommen jetzt zur Konstruktion der Riemannschen Flächen, die durch analytische Fortsetzung eines Funktionskeims auf einer Riemannschen Fläche X entstehen.

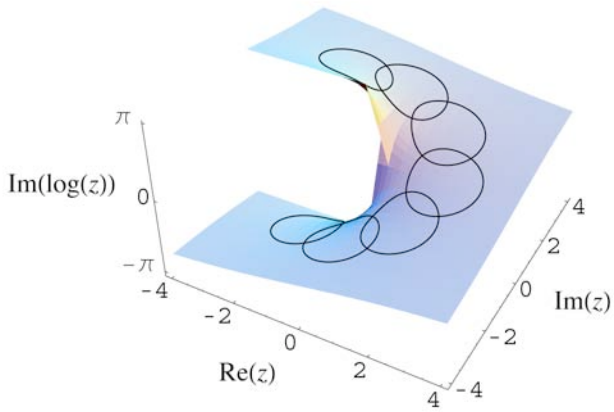
Definition 4.4.8
Sei X eine Riemannsche Fläche, $\gamma : [0,1] \to X$ eine Kurve mit Anfangspunkt $a = \gamma(0)$ und Endpunkt $b = \gamma(1)$. Man sagt, ein holomorpher Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_b$ gehe durch <u>analytische Fortsetzung längs der Kurve</u> γ aus dem holomorphen Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_a$ hervor, falls gilt:

Es gibt eine Familie von Funktionskeimen $\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ für jedes $t \in [0,1]$ mit $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1 = \psi$, mit der Eigenschaft: zu jedem $\tau \in [0,1]$ existiert eine Umgebung $T \subset [0,1]$ von τ, eine offene Menge $U \subset X$ mit $\gamma(T) \subset U$ und eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\rho_{\gamma(t)}(f) = \varphi_t \quad \text{für alle} \quad t \in T \ .$$

Dabei ist natürlich $\rho_{\gamma(t)}(f)$ der Keim der Funktion f im Punkt $\gamma(t)$.

Lokal im Kurvenparameter τ ist die Folge von Funktionskeimen also durch eine holomorphe Funktion gegeben. Wir schauen uns das im Bild die analytische Fortsetzung des Logarithmus an:



Bemerkung 4.4.9.
Wegen der Kompaktheit des Intervalls $[0,1]$ ist die Bedingung in Definition 4.4.8 äquivalent zu der folgenden Bedingung: es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_{n-1} < t_n = 1$ des Intervalls, Gebiete $U_i \subset X$ mit $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ und holomorphe Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit $i = 1, \ldots n$, so dass gilt:

1. *φ ist der Keim von f_1 im Anfangspunkt a der Kurve γ und ψ ist der Keim von f_n im Endpunkt b von γ.*

2. *$f_i|_{V_i} = f_{i+1}|_{V_i}$ für $i = 1, \ldots n-1$. Dabei ist V_i die Zusammenhangskomponente von $U_i \cap U_{i+1}$, die den Punkt $\gamma(t_i)$ enthält.*

Die Punkte des Überlagerungsraums $|\mathcal{O}|$ der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen sind ja gerade die holomorphen Funktionskeime. Wir interpretieren daher die analytische Fortsetzung längs der Kurve mit Hilfe der aus der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen konstruierten Überlagerung $p : |\mathcal{O}| \to X$ aus Definition 4.4.6.

Lemma 4.4.10.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $\gamma : [0,1] \to X$ eine Kurve mit Anfangspunkt $a = \gamma(0)$ und Endpunkt $b = \gamma(1)$. Dann ist der Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_b$ genau dann eine analytische Fortsetzung eines Funktionskeims $\varphi \in \mathcal{O}_a$ längs γ, wenn es eine Liftung $\hat{\gamma} : [0,1] \to |\mathcal{O}|$ der Kurve γ gibt mit $\hat{\gamma}(0) = \varphi$ und $\hat{\gamma}(1) = \psi$.

Für den formalen Beweis verweisen wir auf das Buch von Forster. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung bei Hausdorff-Räumen aus Satz 4.3.10.1 folgt aus Lemma 4.4.10, dass die analytische Fortsetzung eines Funktionskeims längs einer Kurve, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Eine weitere Folgerung ist

Satz 4.4.11 (Monodromie-Satz).
Sei X eine Riemannsche Fläche und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ zwei homotope Kurven von $a \in X$ nach $b \in X$. Wir nehmen zusätzlich an, dass es eine Homotopie $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to X$ und einen Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_a$ gibt, der sich längs jeder Kurve $\gamma(-,s)$ fortsetzen lässt. Dann ergeben die analytischen Fortsetzungen von ψ längs γ_0 und γ_1 denselben Funktionskeim $\psi' \in \mathcal{O}_b$.

Beweis.
Wir wenden Satz 4.3.11 über die Liftung homotoper Kurven auf die Überlagerung $|\mathcal{O}| \to X$ an, die nach Bemerkung 4.4.7.3. Hausdorffsch ist. □

Die Situation vereinfacht sich im Falle einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen:

Korollar 4.4.12.
Sei X eine einfach zusammenhängende *Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein Funktionskeim, der sich in X unbegrenzt, d.h. längs jeder von a ausgehenden Kurve, analytisch fortsetzen lässt. Dann gibt es eine auf ganz X holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $\rho_a(f) = \varphi$. Die Funktion f ist wegen des Identitätssatzes 4.1.13 eindeutig bestimmt.*

Beweis.
Für $x \in X$ sei ψ_x der Funktionskeim, der man aus φ durch analytische Fortsetzung entlang irgend einer Kurve erhält. Da X einfach zusammenhängend ist, ist ψ_x wegen des Monodromiesatzes 4.4.11 unabhängig davon, welche Kurve man wählt. Man setze $f(x) := \psi_x(x)$. Dann ist f eine auf X holomorphe Funktion mit $\rho_a(f) = \varphi$. □

Im allgemeinen aber entstehen durch analytische Fortsetzung entlang verschiedener Kurven verschiedene Funktionskeime. Will man daher *alle* analytischen Fortsetzungen zusammenfassen, kommt man auf "mehrdeutige Funktionen", d.h. Funktionen auf Überlagerungsflächen.

Um dies präziser überlegen wir uns: Seien X und Y Riemannsche Flächen mit ihren Garben $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ holomorpher Funktionen und $p : Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerungsabbildung. Für $y \in Y$ induziert die Abbildung p, da sie lokal biholomorph ist, einen Ringisomorphismus der Keime

$$\begin{array}{rcl} p^* : \mathcal{O}_{X,p(y)} & \stackrel{\sim}{\to} & \mathcal{O}_{Y,y} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ p \end{array} .$$

Es sei

$$p_* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,p(y)}$$

die Umkehrabbildung von p^*.

Wir können jetzt den Begriff einer anayltischen Fortsetzung eines Funktionskeims unabhängig von einer Kurve auf X formulieren:

Definition 4.4.13
Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein holomorpher Funktionskeim im Punkt a.

1. *Ein Quadrupel (Y, p, f, b) heißt analytische Fortsetzung des Funktionskeims φ, wenn gilt*
   (a) *Y ist eine Riemannsche Fläche und $p : Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerung.*

(b) *f ist eine auf Y holomorphe Funktion.*

(c) *b ist ein Punkt von Y mit $p(b) = a$, d.h. $b \in Y$ ist ein Punkt über $a \in X$, und für die Funktionskeime gilt*

$$p_*(\rho_b(f)) = \varphi \ .$$

In diesem Sinne setzt f auf der Überlagerung Y den Funktionskeim φ fort.

2. *Eine analytische Fortsetzung heißt maximal, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat: ist (Z, q, g, c) eine andere analytische Fortsetzung von φ, so gibt es eine spurtreue holomorphe Abbildung $F : Z \to Y$ mit $F(c) = b$ und $F^*(f) = g$.*

Lemma 4.4.14.
Eine maximale analytische Fortsetzung ist bis auf Isomorphie eindeutig. Die Eigenschaft in Definition 4.4.13.2. ist also universell.

Beweis.
Ist nämlich neben (Y, p, f, b) auch (Z, q, g, c) eine maximale analytische Fortsetzung des Funktionskeims φ, so gibt es eine spurtreue holomorphe Abbildung $G : Y \to Z$ mit $G(b) = c$ und $G^*(g) = f$. Die Zusammensetzung $F \circ G$ ist eine spurtreue holomorphe Abbildung von Y auf sich, die den Punkt b festlässt. Nach Satz 4.3.10 über die Eindeutigkeit der Liftung ist daher $F \circ G = \mathrm{id}_Y$. Ebenso zeigt man $G \circ F = \mathrm{id}_Z$. Daraus folgt, dass $G : Y \to Z$ biholomorph ist. □

Um die Existenz von analytischen Fortsetzungen zu zeigen, brauchen wir einen Hilfssatz, der uns zeigt, dass wir aus globalen analytischen Fortsetzungen wirklich Fortsetzungen längs Kurven in einer Riemannschen Fläche erhalten:

Lemma 4.4.15.
Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein Funktionskeim in a. Sei $(Y, p, f, , b)$ eine analytische Fortsetzung des Keims φ wie in Definition 4.4.13.

Sei $v : [0, 1] \to Y$ eine Kurve auf der Überlagerung Y mit $v(0) = b$ und $v(1) =: y$. Dann ist der Funktionskeim

$$\psi := p_*(\rho_y(f)) \ \in \mathcal{O}_{p(y)}$$

eine analytische Fortsetzung von φ längs der Kurve $u := p \circ v$ in X wie in Definition 4.4.8.

Beweis.
Für jedes $t \in [0, 1]$ betrachte die Familie von Funktionskeimen auf X

$$\varphi_t := p_*(\rho_{v(t)}(f)) \ \in \mathcal{O}_{p(v(t))} = \mathcal{O}_{u(t)} \ .$$

Dann ist $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1 = \psi$.

Sei $t_0 \in [0, 1]$. Da die Überlagerung $p : Y \to X$ unverzweigt ist, gibt es offene Umgebungen $V \subset Y$ von $v(t_0)$ und $U \subset X$ von $u(t_0)$, so dass $p|V \to U$ biholomorph ist mit Umkehrabbildung $q : \ U \to V$. Setze

$$g := q^*(f|V) \in \mathcal{O}(U) \ .$$

Dann ist $p_*(\rho_\eta(f)) = \rho_{p(\eta)}(g)$ für alle $\eta \in V$. Es gibt eine Umgebung $T \subset [0, 1]$ von t_0 mit $v(T) \subset V$ und folglich $u(T) \subset U$. Für alle $t \in T$ gilt dann aber

$$\rho_{u(t)}(g) \ = p_*(\rho_{v(t)}(f)) \ = \varphi_t \ ,$$

so dass ψ eine analytische Fortsetzung von φ längs der Kurve u in X ist. $\square$

Satz 4.4.16.
Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein holomorpher Funktionskeim im Punkt a. Dann existiert eine maximale analytische Fortsetzung (Y, p, f, b) von φ.

Beweis.

- Zur Konstruktion der Fortsetzung:
  - Sei Y die Zusammenhangskomponente des Überlagerungsraums $|\mathcal{O}|$ der Garbe $\mathcal{O}$, in der der Funktionskeim φ liegt.
  - Die Einschränkung der Abbildung $p : |\mathcal{O}| \to X$ auf Y bezeichnen wir ebenfalls mit p. Dies ist eine unverzweigte Überlagerungsabbildung. Wir versehen Y gemäß Satz 4.3.8 mit einer komplexen Struktur, so dass Y zu einer Riemannschen Fläche wird und $p : Y \to X$ holomorph ist.
  - Wir konstruieren die Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$. Ein Punkt $\eta \in Y$ ist per Definition ein Funktionskeim. Definiere den Wert der Funktion f im Keim η als den Wert des Keims η in seinem Fußpunkt $p(\eta)$,

    $$f(\eta) := \eta(p(\eta)) \quad .$$

    Weil Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, folgt, dass die Funktion f holomorph ist. Man rechnet nach, dass $p_*(\rho_\eta(f)) = \eta$ gilt.
  - Setze schließlich $b := \varphi \in Y$.
- Wir zeigen, das die so konstruierte Fortsetzung (Y, p, f, b) maximal ist. Sei dazu (Z, q, g, c) eine weitere Fortsetzung. Wir müssen eine Abbildung $F : Z \to Y$ konstruieren.

  Sei $\zeta \in Z$ und $q(\zeta) =: x \in X$. Nach dem vorgehende Lemma 4.4.15 entsteht der Funktionskeim $q_*(\rho_\zeta(g)) \in \mathcal{O}_X$ durch analytische Fortsetzung längs einer Kurve in X von a nach x aus dem Funktionskeim φ.

  Nach Lemma 4.4.10 besteht aber Y aus allen Funktionskeimen, die sich durch analytische Fortsetzung längs Kurven in X aus dem Funktionskeim φ erhalten lassen. Es gibt daher genau ein $\eta \in Y$ mit $q_*(\rho_\zeta(g)) = \eta$. Man setze $F(\zeta) = \eta$.

  Es ist leicht zu verifizieren, dass $F : Z \to Y$ eine holomorphe spurtreue Abbildung mit $F(c) = b$ und $F^*(f) = g$ ist.

$\square$

Man kann die Argumente dieses Abschnitts auch auf meromorphe Funktionen anwenden, wobei man dann die Überlagerung $|\mathcal{M}| \to X$ benutzt. Wir haben hier die Situation dadurch stark vereinfacht, dass wir Verzweigungsstellen außer Betracht gelassen haben. Für eine Diskussion einfacher Fälle mit Verzweigungspunkten verweisen wir auf Forster, Kapitel 8.

4.5 Differentialformen

Betrachtung 4.5.1.

- *Wir führen eine weitere Garbe ein: für eine offene Teilmenge* $U \subset \mathbb{C}$ *sei* $\mathcal{E}(U)$ *die komplexe Algebra aller komplexwertigen glatten Funktionen* $f : U \to \mathbb{C}$. *Neben den Ableitungen*

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

betrachten wir auch die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y})$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen besagen dann, dass der Vektorraum $\mathcal{O}(U)$ *der auf* U *holomorphen Funktionen gerade der Kern der linearen Abbildung*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$$

ist.

- *Mit Hilfe von differenzierbaren Karten überträgt man den Begriff einer differenzierbaren Funktion auf offene Gebiete* $Y \subset X$ *einer Riemannschen Fläche* X *und erhält die Garbe* $\mathcal{E}$ *der differenzierbaren Funktionen auf einer Riemannschen Fläche. Man kann natürlich ähnlich ganz allgemein für eine glatte Mannigfaltigkeit die Garbe* $\mathcal{E}$ *der glatten Funktionen einführen.*

- *Ist nun* (U, z) *eine komplexe Karte einer Riemannschen Fläche* X, *so kann man die Differentialoperatoren*

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} : \quad \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$$

definieren.

Definition 4.5.2

1. Sei X eine Riemannsche Fläche und $a \in X$. Der Halm $\mathcal{E}_a$ der Garbe $\mathcal{E}$ in a besteht dann aus allen differenzierbaren Funktionskeimen im Punkt a. Sei $\mathfrak{m}_a \subset \mathcal{E}_a$ der Untervektorraum aller Funktionskeime, die in a verschwinden.

2. Wir sagen, dass ein differenzierbarer Funktionskeim $\varphi \in \mathfrak{m}_a$ in zweiter Ordnung verschwindet, wenn er durch eine Funktion f repräsentiert wird, für die in einer Koordinatenumgebung $(U, z = x + \mathrm{i}y)$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \ .$$

   Da jede partielle Ableitung in neuen Koordinaten eine Linearkombination der partiellen Ableitungen in den alten Koordinaten ist, folgt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl lokaler Koordinaten ist.

   Sei $\mathfrak{m}_a^2 \subset \mathfrak{m}_a$ *der Untervektorraum aller Funktionskeime, die in zweiter Ordnung verschwinden.*

3. *Der Quotientenvektorraum*
$$T_a^{(1)} := \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2$$
heißt *Kotangentialraum* *von* X *im Punkt* a. *Ist* U *eine offene Umgebung von* a *und* $f \in \mathcal{E}(U)$, *so nennen wir das Element*
$$\mathrm{d}_a f := (f - f(a)) \bmod \mathfrak{m}_a^2 \in T_a^{(1)}$$
das *Differential* *von* f *in* a. *Man beachte hierzu, dass die Funktion* $f - f(a)$ *in* a *verschwindet und daher ein Element in* $\mathfrak{m}_a$ *definiert.*

Satz 4.5.3.
Sei X *eine Riemannsche Fläche,* $a \in X$ *und* $(U, z = x + \mathrm{i}y)$ *eine Koordinatenumgebung von* a.

1. *Dann bilden die Elemente* $\mathrm{d}_a x$ *und* $\mathrm{d}_a y$ *eine Basis des Kotangentialraums* $T_a^{(1)}$.

2. *Ist* f *eine in einer Umgebung von* a *differenzierbare Funktion, so gilt*
$$\begin{aligned} \mathrm{d}_a f &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\ \mathrm{d}_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\ \mathrm{d}_a y \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(a)\ \mathrm{d}_a z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\ \mathrm{d}_a \overline{z}\ . \end{aligned}$$

Beweis.

- Wir zeigen, dass $(\mathrm{d}_a x, \mathrm{d}_a y)$ ein Erzeugendensystem von $T_a^{(1)}$ ist. Sei $t \in T_a^{(1)}$ repräsentiert durch den Funktionskeim $\varphi \in \mathfrak{m}_a$. Die Taylorentwicklung von φ um a ergibt
$$\varphi = c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) + \psi$$
mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $\psi \in \mathfrak{m}_a^2$. Modulo $\mathfrak{m}_a^2$ erhält man $t = c_1 \mathrm{d}_a x + c_2 \mathrm{d}_a y$.

- Die Familie $(\mathrm{d}_a x, \mathrm{d}_a y)$ ist linear unabhängig. Denn aus $c_1 \mathrm{d}_a x + c_2 \mathrm{d}_a y = 0$ folgt
$$c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) \in \mathfrak{m}_a^2\ .$$
Bildet man die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks nach x und y, so erhält man $c_1 = c_2 = 0$.

- Sei f differenzierbar in einer Umgebung von a. Dann gilt die Taylorentwicklung
$$f - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y(a)) + g\ ,$$
wobei die Funktion g in a in zweiter Ordnung verschwindet. Daraus folgt
$$\mathrm{d}_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}_a y\ .$$
Die Behauptungen für $(\mathrm{d}_a z, \mathrm{d}_a \overline{z})$ folgen analog.

□

Seien (U, z) und (U', z') zwei holomorphe Koordinatenumgebungen eines Punktes $a \in X$. Dann folgt aus der holomorphen Verträglichkeit der Karten

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial z'}{\partial z}(a) & \in & \mathbb{C}^* & \quad & \frac{\partial \overline{z}'}{\partial \overline{z}}(a) & \in & \mathbb{C}^* \\ \frac{\partial z'}{\partial \overline{z}}(a) & = & 0 & \quad & \frac{\partial \overline{z}'}{\partial z}(a) & = & 0 \end{array} .$$

Die Untervektorräume

$$T_a^{1,0} := \mathbb{C}\mathrm{d}_a z \quad \text{und} \quad T_a^{0,1} := \mathbb{C}\mathrm{d}_a \overline{z} \quad \text{von} \quad T_a^{(1)}$$

sind also von der Wahl der Koordinate unabhängig.

Wir definieren daher:

Definition 4.5.4

1. *Elemente von $T_a^{1,0}$ heißen Kotangentialvektoren vom Typ $(1,0)$, Elemente von $T_a^{0,1}$ vom Typ $(0,1)$.*

2. *Ist f differenzierbar, so definieren wir*

$$\mathrm{d}_a f = \mathrm{d}'_a f + \mathrm{d}''_a f \quad \textit{mit} \quad \mathrm{d}'_a f \in T_a^{(1,0)} \textit{ und } \mathrm{d}''_a f \in T_a^{(0,1)}$$

durch

$$\mathrm{d}'_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\mathrm{d}_a z \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}''_a f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\mathrm{d}_a \overline{z} \ .$$

3. *Sei Y eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche X. Unter einer Differentialform erster Ordnung oder Einsform auf Y versteht man eine Abbildung*

$$\omega : \ Y \to \cup_{a \in Y} T_a^{(1)}$$

mit $\omega(a) \in T_a^{(1)}$ für alle $a \in Y$. Gilt $\omega(a) \in T_a^{(1,0)}$ bzw. $\omega(a) \in T_a^{(0,1)}$ für alle $a \in Y$, so heißt die Differentialform ω vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$.

4. *Eine Differentialform ω erster Ordnung heißt differenzierbar oder glatt, wenn sich ω bezüglich jeder komplexen Karte (U, z) darstellen lässt als*

$$\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\overline{z} \quad \textit{in } U \cap Y \quad \textit{mit } f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y) \ .$$

Man kann natürlich für beliebige glatte Mannigfaltigkeiten den Begriff einer glatten Differentialform einführen.

5. *Eine Differentialform ω erster Ordnung auf einer Riemannschen Fläche heißt holomorph, wenn sich ω bezüglich jeder komplexen Karte (U, z) darstellen lässt als*

$$\omega = f\mathrm{d}z \quad \textit{in } U \cap Y \quad \textit{mit } f \in \mathcal{O}(U \cap Y) \ .$$

6. *Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ den Vektorraum der differenzierbaren Differentialformen erster Ordnung auf U. Mit $\mathcal{E}^{1,0}(U)$ bzw. $\mathcal{E}^{0,1}(U)$ bezeichnen wir den Untervektorraum der differenzierbaren Differentialformen vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ sowie mit $\Omega(U)$ den Untervektorraum der holomorphen Differentialformen. Man beachte, dass per Definition holomorphe Differentialformen vom Typ $(1,0)$ sind.*

   Zusammen mit den Einschränkungsabbildungen erhalten wir die Garben $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}$ und Ω von Vektorräumen über einer Riemannschen Fläche X.

Betrachtung 4.5.5.

1. *Sei Y eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche X. Sei $a \in Y$ und $\omega \in \Omega(Y \setminus \{a\})$. Sei (U, z) eine Koordinatenumgebung mit $U \subset Y$ und $z(a) = 0$. Dann gilt auf U die Gleichung $\omega = f\mathrm{d}z$ mit $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Sei*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

die Laurent-Entwicklung der holomorphen Funktion f.

2. *Gilt $c_n = 0$ für alle $n < 0$, so lässt sich ω holomorph auf ganz Y fortsetzen. Wir sagen, die Differentialform ω habe in a eine hebbare Singularität.*

   Analog definiert man, wann eine Differentialform ω in einem Punkt a einen Pol k-ter Ordnung hat und wann eine wesentliche Singularität vorliegt.

3. *Man nennt den Koeffizienten c_{-1} das Residuum der Einsform ω in a,*

$$c_{-1} =: \mathrm{res}_a(\omega) \quad .$$

Lemma 4.5.6.
Das Residuum einer Einsform ist unabhängig von der Wahl der Karte (U, z).

Beweis.
Sei V eine offene Umgebung von a. Wir führen den Beweis in drei Schritten:

- Ist g eine holomorphe Funktion auf $V \setminus \{a\}$, so ist das Residuum der Einsform $\mathrm{d}g$ in a gleich Null, unabhängig von der Karte.

  Denn sei (U, z) eine beliebige Koordinatenumgebung mit $z(a) = 0$ und

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

  die Laurent-Entwicklung der Funktion g. Dann ist

$$\mathrm{d}g = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n z^{n-1})\mathrm{d}z \quad ,$$

  also der Koeffizient von $z^{-1}\mathrm{d}z$ gleich $0 \cdot c_0$ und somit gleich Null.

- Ist $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ eine holomorphe Funktion mit einer Nullstelle erster Ordnung in a, so ist das Residuum $\mathrm{res}_a(\varphi^{-1}\mathrm{d}\varphi) = 1$, unabhängig von der Wahl der Karte.

  Denn sei (U, z) eine Koordinatenumgebung mit $z(a) = 0$. Dann gilt $\varphi = z \cdot h$, wobei die Funktion h in a holomorph ist mit $h(a) \neq 0$. Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{h\mathrm{d}z + z\mathrm{d}h}{zh} = \frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{\mathrm{d}h}{h} \quad .$$

  Da $h(a) \neq 0$ gilt, ist der zweite Summand eine holomorphe Differentialform, hat also verschwindendes Residuum in a. Daher ist

$$\mathrm{res}_a(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi}) = \mathrm{res}_a(\frac{\mathrm{d}z}{z}) = 1 \ .$$

- Sei wieder (U, z) eine Koordinatenumgebung mit $z(a) = 0$ und $\omega = f \mathrm{d}z$ mit

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \ .$$

Wir setzen

$$g := \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} \ ;$$

dies ist eine auf einer punktierten Umgebung von a holomorphe Funktion. Dann gilt $\omega = \mathrm{d}g + c_{-1} z^{-1} \mathrm{d}z$. Nach dem ersten Beweisschritt verschwindet das Residuum des ersten Summanden. Nach dem zweiten Beweisschritt ist das Residuum des zweiten Summanden unabhängig von der Karte.

□

Definition 4.5.7

1. *Eine meromorphe Differentialform ω auf einer offenen Teilmenge Y einer Riemannschen Fläche X ist eine auf einer offenen Teilmenge $Y' \subset Y$ definierte holomorphe Differentialform, so dass gilt:*
   (a) *$Y \setminus Y'$ besteht nur aus isolierten Punkten.*
   (b) *ω hat in jedem Punkt $a \in Y \setminus Y'$ einen Pol.*
2. *Die Menge aller auf Y meromorphen Differentialformen erster Ordnung bezeichnen wir mit $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$. Mit den natürlichen Verknüpfungen und Einschränkungsabbildungen erhalten wir eine Garbe $\mathcal{M}^{(1)}$ von komplexen Vektorräumen auf X.*
3. *Die meromorphen Differentialformen erster Ordnung auf X heißen auch abelsche Differentiale. Ein abelsches Differential heißt*
   (a) *erster Gattung, wenn es überall holomorph ist.*
   (b) *zweiter Gattung, wenn das Residuum in jeder Polstelle gleich Null ist.*
   (c) *dritter Gattung, sonst.*

Betrachtung 4.5.8.

1. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $a \in X$. Mit Hilfe des äußeren Produkts von Vektorräumen definieren wir*
$$T_a^{(2)} := \ \wedge^2 T_a^{(1)} \ .$$
Ist (U, z) eine Koordinatenumgebung von a und $z = x + \mathrm{i}y$, so ist $\mathrm{d}_a x \wedge \mathrm{d}_a y$ eine Basis von $T_a^{(2)}$. Eine andere Basis ist $\mathrm{d}z_a \wedge \mathrm{d}\overline{z}_a$. Die Dimension des komplexen Vektorraums $T_a^{(2)}$ ist also gleich Eins. Wir führen analog zur Definition 4.5.4 Differentialformen zweiter Ordnung ein und bezeichnen mit $\mathcal{E}^{(2)}$ die Garbe der glatten Differentialformen zweiter Ordnung auf X.
2. *Wir definieren jetzt für jede offene Teilmenge $U \subset X$ Ableitungen*
$$\mathrm{d}, \mathrm{d}', \mathrm{d}'' : \ \mathcal{E}^{(1)}(U) \to \mathcal{E}^{(2)}(U) \ .$$

Dazu schreiben wir die Differentialform ω lokal als endliche Summe

$$\omega = \sum f_k \mathrm{d}g_k$$

mit differenzierbaren Funktionen f_k und g_k, etwa $\omega = f_1\mathrm{d}z + f_2\mathrm{d}\overline{z}$. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\omega & := & \sum \mathrm{d}f_k \wedge \mathrm{d}g_k \\ \mathrm{d}'\omega & := & \sum \mathrm{d}'f_k \wedge \mathrm{d}g_k \\ \mathrm{d}''\omega & := & \sum \mathrm{d}''f_k \wedge \mathrm{d}g_k \ . \end{array}$$

Eine explizite Rechnung zeigt, dass dies unabhängig von der Darstellung von ω ist.

Es gelten dann die Rechenregeln

Lemma 4.5.9.
Sei U eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche, $f \in \mathcal{E}(U)$ und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$. Dann gilt

1. $\mathrm{d}\mathrm{d}f = \mathrm{d}'\mathrm{d}'f = \mathrm{d}''\mathrm{d}''\ f = 0$.
2. $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}'\omega + \mathrm{d}''\omega$.
3. $\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega$ *und analoge Regeln für die Ableitungsoperatoren* d' *und* d''.

Bemerkungen 4.5.10.

1. *Die Regeln folgen sofort aus den Definitionen, etwa* $\mathrm{d}\mathrm{d}f = \mathrm{d}(1\mathrm{d}f) = \mathrm{d}1 \wedge \mathrm{d}f = 0$.
2. *Ferner folgt*
$$0 = \mathrm{d}\mathrm{d}f = (\mathrm{d}' + \mathrm{d}'')(\mathrm{d}' + \mathrm{d}'')\ f = \mathrm{d}'\mathrm{d}''f + \mathrm{d}''\mathrm{d}'f$$
und daher
$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\ f = -\mathrm{d}''\mathrm{d}'\ f$$
3. *Bezüglich einer lokalen Karte* $(U, z = x + \mathrm{i}y)$ *gilt*
$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ .$$
Daher heißt eine auf einer offenen Teilmenge einer Riemannschen Fläche differenzierbare Funktion <u>*harmonisch*</u>*, falls* $\mathrm{d}'\mathrm{d}''f = 0$ *gilt.*

Definition 4.5.11
Sei Y eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche X. Eine Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt. Eine Differentialform heißt <u>total</u> oder <u>exakt</u>, wenn eine glatte Funktion $f \in \mathcal{E}(Y)$ existiert, so dass $\omega = \mathrm{d}f$.

Bemerkungen 4.5.12.

1. *Wegen* $\mathrm{d}\mathrm{d}f = 0$ *ist jede exakte Differentialform geschlossen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Mehr dazu wird in Abschnitt 5.2 gesagt werden.*
2. *Wir wollen den Zusammenhang zwischen holomorphen und geschlossenen Differentialformen klären.*

   Ist Y eine offene Teilmenge, so gilt:

(a) *Jede holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega(Y)$ ist geschlossen. (Nach Definition 4.5.4 ist sie vom Typ $(1,0)$.)*

(b) *Jede geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(Y)$ ist holomorph.*

Denn eine differenzierbare Differentialform ω vom Typ $(1,0)$ lässt sich lokal *schreiben als $\omega = f\mathrm{d}z$ mit einer differenzierbaren Funktion f. Wir berechnen die Ableitung:*

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}\right) \wedge \mathrm{d}z = -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}\ .$$

Also ist $\mathrm{d}\omega = 0$ äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

3. *Ist u eine harmonische Funktion, so ist $\mathrm{d}'u$ eine holomorphe Differentialform, denn es ist $\mathrm{d}\mathrm{d}'u = (\mathrm{d}' + \mathrm{d}'')\mathrm{d}'u = \mathrm{d}''\mathrm{d}'u = 0$.*

Betrachtung 4.5.13 (Pullback von Differentialformen)**.**
Sei $F : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Für jede offene Menge $U \subset Y$ induziert F einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} F^* : \mathcal{E}(U) & \to & \mathcal{E}(F^{-1}(U)) \\ f & \mapsto & f \circ F\ . \end{array}$$

Wir definieren analoge Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} F^* : \mathcal{E}^{(k)}(U) & \to & \mathcal{E}^{(k)}(F^{-1}(U)) \quad \text{für} \quad k = 1,2 \\ \sum f_i \mathrm{d}g_i & \mapsto & \sum F^*(f_j)\mathrm{d}(F^*g_j) \\ \sum f_i \mathrm{d}g_i \wedge \mathrm{d}h_i & \mapsto & F^*(f_j)\mathrm{d}(F^*g_j) \wedge \mathrm{d}(F^*h_j) \end{array}$$

Man macht sich klar, dass diese Abbildungen wohldefiniert sind und sich diese Abbildungen zu Vektorraummorphismen

$$F^* : \mathcal{E}^{(k)}(U) \to \mathcal{E}^{(k)}(F^{-1}U)$$

zusammensetzen. Man nennt $F^*\omega$ die entlang F zurückgezogene Differentialform ω oder den Pullback von ω. Es gilt

$$F^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(F^*f) \quad F^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}F^*\omega)$$

und analoge Regeln für die Ableitungsoperatoren d' *und* d''.

4.6 Integration von Differentialformen

Differentialformen erster Ordnung kann man über Kurven integrieren, wobei das Integral für eine *geschlossene* Differentialform – also insbesondere für eine holomorphe Differentialform – nur von der Homotopieklasse der Kurve abhängt. Auf einer einfach-zusammenhängenden Fläche X liefert die Integration geschlossener Differentialformen erster Ordnung also Funktionen auf X. Im Allgemeinen aber erhält man mehrwertige Funktionen. Neben der analytischen Fortsetzung, vergleiche Satz 4.4.16, ist dies eine zweite wichtige Quelle mehrwertiger Funktionen.

Mit der Integration von Differentialformen zweiter Ordnung beschäftigen wir uns im zweiten Teil des Abschnitts, um einen Residuensatz auf Riemannschen Flächen zu beweisen.

4.6.1 Differentialformen erster Ordnung

Betrachtung 4.6.1.
Sei X eine Riemannsche Fläche. Wir definieren für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve

$$c : [0,1] \to X$$

und eine Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ das Integral $\int_c \omega$, indem wir eine Unterteilung des Intervals $[0,1]$ finden, also

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

und Karten (U_k, z_k) von X mit $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$. Dann schreiben wir $\omega|U_k = f_k \mathrm{d}x_k + g_k \mathrm{d}y_k$ mit differenzierbaren Funktionen f_k, g_k und setzen

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t)) \frac{\mathrm{d}x_k(c(t))}{\mathrm{d}t} + g_k(c(t)) \frac{\mathrm{d}y_k(c(t))}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$

Man rechnet nach, dass die rechte Seite unabhängig von der Wahl der Unterteilung des Intervalls und der Wahl der Karten ist.

Indem man den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung in Koordinaten anwendet, folgt:

Satz 4.6.2.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $c : [0,1] \to X$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und $F \in \mathcal{E}(X)$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\int_c \mathrm{d}F = F(c(1)) - F(c(0)) \ .$$

Definition 4.6.3
Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine glatte Differentialform. Eine Funktion $F \in \mathcal{E}(X)$ heißt <u>Stammfunktion</u> von ω, *falls* $\mathrm{d}F = \omega$ *gilt.*

Bemerkungen 4.6.4.

1. *Eine Differentialform, die eine Stammfunktion besitzt, ist geschlossen. Dies folgt sofort aus $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}^2 F = 0$.*

2. *Die Stammfunktion ist nicht eindeutig; verschiedene Stammfunktionen unterscheiden sich um eine additive Konstante.*

3. *Mit Hilfe von Satz 4.6.2 kann man Kurvenintegrale über Differentialformen mit bekannter Stammfunktion leicht berechnen. Das Integral einer exakten Differentialform hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.*

4. *Lokal existieren Stammfunktionen. Sei U eine offene Kreisscheibe um den Nullpunkt in $\mathbb{C}$ und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$. Wir schreiben*

   $$\omega = f \mathrm{d}x + g \mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad f, g \in \mathcal{E}(U) \ .$$

   Dann ist ω genau dann geschlossen, $\mathrm{d}\omega = 0$, wenn

   $$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

gilt. Man rechnet dann nach, dass das Integral längs der radialen Verbindung von 0 *nach* (x, y)

$$F(x,y) := \int_0^1 \mathrm{d}t \, (f(tx,ty)x + g(tx,ty)y)$$

eine Stammfunktion ist. Es gilt zunächst:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 \mathrm{d}t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)tx + \frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)ty + f(tx,ty) \right) \; .$$

Nun ist aber wegen

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx,ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y$$

dies gleich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \int_0^1 \mathrm{d}t \left(t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx,ty) + f(tx,ty) \right) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \cdot f(tx,ty)) \right) = f(x,y) \; . \end{aligned}$$

Global existieren Stammfunktionen für geschlossene Differentialformen auf einer Riemannschen Fläche X im Allgemeinen nicht. Allerdings kann man stets eine Überlagerung finden, auf der eine Stammfunktion existiert. In diesem Sinn definieren geschlossene Differentialformen – und somit insbesondere holomorphe Differentialformen – mehrwertige Funktionen auf X.

Satz 4.6.5.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene *Differentialform. Dann existiert eine unverzweigte unbegrenzte zusammenhängende Überlagerung $p: \hat{X} \to X$ und eine Stammfunktion $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ der Differentialform $p^*\omega$.*

Beweis.
Wir definieren die Garbe $\mathcal{F}$ der Stammfunktionen von ω: für eine offene Teilmenge $U \subset X$ besteht $\mathcal{F}(U)$ aus allen Funktionen $f \in \mathcal{E}(U)$ mit $\mathrm{d}f = \omega$. Man beachte, dass hier eine Garbe von Mengen voliegt, da die Summe zweier Stammfunktionen nicht wieder eine Stammfunktion ist. Auch auf mengenwertige Garben kann die folgenden Sätze anzuwenden.

Diese Garbe genügt dem Identitätssatz im Sinne von Definition 4.4.7.2, denn für ein Gebiet $U \subset X$ unterscheiden sich je zwei Elemente um eine komplexe Konstante.

Wir betrachten die unverzweigte Überlagerung $|\mathcal{F}| \to X$. Nach Bemerkung 4.4.7.3 ist der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ Hausdorffsch. Wir zeigen, dass die Überlagerung $|\mathcal{F}| \to X$ unbegrenzt ist.

Zu jedem Punkt $a \in X$ gibt es nach Bemerkung 4.6.4 eine zusammenhängende offene Umgebung U und eine Stammfunktion $f \in \mathcal{F}(U)$ von ω. Dann ist $f + c$, wobei c alle komplexen Werte annimmt, die Gesamtheit aller Stammfunktionen von ω über U. Daraus folgt

$$p^{-1}(U) = \cup_{c \in \mathbb{C}} [U, f + c] \; .$$

Die Mengen sind paarweise disjunkt und alle Projektionen auf U Homöomorphismen. Damit ist klar, dass $p : |\mathcal{F}| \to X$ eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung ist.

Damit liefert aber auch durch Einschränkung jede Zusammenhangskomponente $\hat{X} \subset |\mathcal{F}|$ eine unverzweigte und unbegrenzte Überlagerung $p : \hat{X} \to X$. Da $\hat{X}$ aber eine Menge von Funktionskeimen ist, ist in natürlicher Weise eine Funktion $F : \hat{X} \to \mathbb{C}$ definiert durch ihren Wert auf einem Funktionskeim φ mit $F(\varphi) = \varphi(p(\varphi))$. Es folgt unmittelbar, dass F eine Stammfunktion von $p^*\omega$ ist.

□

Beispiel 4.6.6.
Sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $X := \mathbb{C}/L$ die zugehörige elliptische Kurve. Die Stammfunktion der Weierstraßschen $\wp$-Funktion ist die Weierstraßsche ζ-Funktion

$$\zeta(z) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \ ,$$

wobei σ ein Quotient von Thetafunktionen ist und es für jedes $\omega \in L$ Werte $a_\omega, b_\omega \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\sigma(z+\omega) = \mathrm{e}^{a_\omega z + b_\omega}\sigma(z) \ .$$

Daraus folgt

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + a_\omega \ ,$$

so dass die Stammfunktion ζ der Weierstraßchen $\wp$-Funktion nur noch auf der Überlagerung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ der elliptischen Kurve definiert ist.

Korollar 4.6.7.

1. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ ihre universelle Überlagerung und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene Differentialform. Dann existiert eine Stammfunktion $f \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ von $\tilde{p}^*\omega$.*
2. *Auf einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche X besitzt jeder geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine Stammfunktion $F \in \mathcal{E}(X)$.*

Beweis.

- Sei $p : \hat{X} \to X$ die nach Satz 4.6.5 existierende unverzweigte unbegrenzte Überlagerung und $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ eine Stammfunktion von $p^*\omega$, also $\mathrm{d}F = p^*\omega$. Da $\tilde{p}$ die universelle Überlagerung ist, gibt es nach Definition 4.3.21 eine spurtreue holomorphe Abbildung $\tau : \tilde{X} \to \hat{X}$. Dann ist τ^*F wegen

$$\mathrm{d}\tau^*F = \tau^*\mathrm{d}\, F = \tau^*p^*\omega$$

  Stammfunktion von $\tau^*p^*\omega = \tilde{p}^*\omega$.
- Die zweite Aussage folgt, da für X einfach zusammenhängend die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : X \to X$ die universelle Überlagerung ist.

□

Korollar 4.6.8.
Sei X eine Riemannsche Fläche, $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ ihre universelle Überlagerung und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene Differentialform. Sei $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ eine Stammfunktion von $\tilde{p}^*\omega$.

Ist dann $c : [0,1] \to X$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und $\tilde{c} : [0,1] \to \tilde{X}$ eine Liftung von c, so gilt

$$\int_c \omega = F(\tilde{c}(1)) - F(\tilde{c}(0)) \ .$$

Beweis.
Für jede Differentialform gilt

$$\int_c \omega = \int_{\tilde{p}(\tilde{c})} \omega = \int_{\tilde{c}} \tilde{p}^* \omega \ .$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Korollar 4.6.2 auf $\tilde{X}$. □

Wir untersuchen noch, wie sich Homotopien von Kurven auf die Integration geschlossener Differentialformen vom Grad 1 auswirken:

Satz 4.6.9.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene Differentialform.

1. *Sind $a, b \in X$ zwei Punkte und $u, v : [0,1] \to X$ zwei homotope Kurven von a nach b, so gilt*
$$\int_u \omega = \int_v \omega \ .$$
2. *Sind $a, b \in X$ zwei Punkte und $u, v : [0,1] \to X$ zwei geschlossene Kurven, die frei homotop sind, so gilt ebenfalls*
$$\int_u \omega = \int_v \omega \ .$$

Beweis.

- Sei $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung und seien $\tilde{u}, \tilde{v} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Liftungen von u bzw. v mit demselben Anfangspunkt. Nach Satz 4.3.11 haben $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ auch denselben Endpunkt. Die Behauptung folgt daher aus Satz 4.6.8.
- Die Kurve u habe Anfangs- und Endpunkt x_0, die Kurve v habe Anfangs- und Endpunkt x_1. Wir konstruieren Wähle eine Kurve w von x_0 nach x_1, so dass u und $w \cdot v \cdot w^-$ homotop sind. Dann gilt nach Teil 1:
$$\int_u \omega = \int_{w \cdot v \cdot w^{-1}} \omega = \int_w \omega + \int_v \omega - \int_w \omega = \int_v \omega \ .$$

□

Definition 4.6.10

1. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $a \in X$. Unter der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ verstehen wir die Menge aller Homotopieklassen von geschlossenen Wegen mit Anfangspunkt in a. Die Gruppenoperation ist durch die Verkettung von Wegen gegeben. Das neutrale Element ist der konstante Weg in a, das inverse Element ist der Weg, in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Wir unterdrücken in der Folge in der Notation den Fußpunkt $a \in X$.*

2. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene Differentialform. Dann kann man für $\sigma \in \pi_1(X)$ die Integrale*
$$a_\sigma := \int_\sigma \omega$$
durch Wahl eines Repräsentanten definieren. Wegen Satz 4.6.9 ist der Wert von a_σ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Diese Integrale heißen Perioden der geschlossenen Differentialform ω.

3. *Für $\sigma, \tau \in \pi_1(X)$ gilt*
$$\int_{\sigma\tau} \omega = \int_\sigma \omega + \int_\tau \omega \ .$$
Man erhält also für jede geschlossene Differentialform ω einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X) \to \mathbb{C}$, den Periodenhomomorphismus.

Beispiel 4.6.11.
Sei $X = \mathbb{C}^*$; dann ist $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$. Ein Erzeuger der Fundamentalgruppe ist die Homotopieklasse des geschlossenen Wegs
$$\begin{array}{rcl} u : [0,1] & \to & \mathbb{C}^* \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \ . \end{array}$$
Sei
$$\omega := \frac{\mathrm{d}z}{z} \ .$$
Dies ist eine holomorphe und daher geschlossene Differentialform auf X. Es ist
$$\int_u \omega = \int_u \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i} \ .$$
Der Periodenhomomorphismus ist daher
$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & 2\pi \mathrm{i} n \end{array}$$

Aus Satz 4.6.2 folgt sofort, dass die Perioden einer geschlossenen Differentialform verschwinden, wenn sie eine Stammfunktion besitzt. Man kann auch die Umkehrung zeigen:

Satz 4.6.12.
Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn alle Perioden von ω verschwinden.

Daraus folgt:

Korollar 4.6.13.
Sei X eine kompakte *Riemannsche Fläche und seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ zwei holomorphe Differentialformen, die denselben Periodenhomomorphismus $\pi_1(X) \to \mathbb{C}$ definieren. Dann gilt $\omega_1 = \omega_2$.*

Beweis.
Die Differenz $\omega := \omega_1 - \omega_2$ hat die Perioden Null, besitzt also nach Satz 4.6.12 eine holomorphe Stammfunktion $f \in \mathcal{O}(X)$. Da X kompakt ist, ist f konstant und somit $\omega = \mathrm{d}f = 0$. □

4.6.2 Differentialformen zweiter Ordnung

Sei X in diesem Abschnitt der Einfachheit halber eine kompakte Riemannsche Fläche.

Bemerkungen 4.6.14.

1. *Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$. Um das Integral von ω zu definieren, wählen wir einen Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von X aus endlich vielen Karten. Wir können dann eine Zerlegung der Eins finden, d.h. eine Familie von Funktionen $f_\alpha \in \mathcal{E}(X)$ mit*

   (a) $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$.

   (b) $\sum_\alpha f_\alpha(x) \;= 1$ *für alle $x \in X$.*

   Dann ist
$$\omega = \sum_\alpha f_\alpha \omega$$
   und wir können definieren
$$\int_X \omega := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \varphi_\alpha^*(\omega f_\alpha) \ ,$$
   wobei auf der rechten Seite nur Integrale von 2-Formen über Gebiete in $\mathbb{C}$ stehen. Man macht sich klar, dass dies wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl des Atlas und der untergeordneten Zerlegung der Eins. (Hierbei geht ein, dass sich 2-Formen mit der Determinante transformieren, also umgekehrt wie Maße.)

2. *Es gilt dann der Satz von Stokes: ist $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$ und $A \subset X$ ein Gebiet mit kompaktem Rand, so gilt*
$$\int_A \mathrm{d}\omega = \int_{\partial A} \omega$$
   wobei die Orientierung des Randes so gewählt ist, dass der Normalenvektor von A und der Tangentialvektor an ∂A eine positiv orientierte Basis bilden. Insbesondere gilt für Differentialformen $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ mit kompakten Träger
$$\int_X \mathrm{d}\omega = 0 \ .$$

Theorem 4.6.15 (Residuensatz).
Sei X eine kompakte *Riemannsche Fläche und seien $a_1, \ldots, a_n$ endlich viele paarweise verschiedene Punkte von X. Dann gilt für jede in $X' := X \setminus \{a_1, \ldots a_n\}$ holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega(X')$*
$$\sum_{k=1}^n \mathrm{res}_{a_k}(\omega) \;= 0 \ .$$

Beweis.

- Wir wählen für jeden Punkt a_k eine Koordinatenumgebung (U_k, z_k). Nachdem wir die Definitionsbereiche evtl. verkleineren, dürfen wir annehmen, dass die Koordinatenumgebungen U_k verschiedener Punkte disjunkt sind, $U_j \cap U_k = \emptyset$ für $j \neq k$. Wir dürfen auch annehmen, dass $z_k(a_k) = 0$ gilt und das Bild $z_k(U_k)$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist.

- Für jedes k wähle eine glatte Funktion $f_k \in \mathcal{E}(X)$ mit kompakten Träger in U_k, die auf einer offenen Umgebung $U'_k \subset U_k$ von a_k gleich Eins ist. Wir setzen

$$g := 1 - (f_1 + f_2 + \ldots f_n) \quad .$$

  Es gilt $g|_{U'_k} = 0$, also lässt sich g durch Null in die Punkte a_k als glatte Funktion fortsetzen und $g\omega$ als Element in $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ fortsetzen. Für diese Differentialform gilt nach dem Satz von Stokes 4.6.14.2

$$\int_X \mathrm{d}(g\omega) = 0 \; .$$

- Da ω nach Voraussetzung holomorph ist, ist ω nach Bemerkung 4.5.12 auf X' geschlossen, $\mathrm{d}\omega = 0$. In $U'_k \cap X'$ ist $f_k\omega = \omega$, also $\mathrm{d}(f_k\omega) = 0$.

  Daher lässt sich $\mathrm{d}(f_k\omega)$ als ein Element von $\mathcal{E}^{(2)}(X)$ auffassen, dessen Träger eine kompakte Teilmenge von $U_k \setminus \{a_k\}$ ist. Es folgt nun aus $\mathrm{d}(g\omega) = -\sum \mathrm{d}(f_k\omega)$

$$0 = \int_X \mathrm{d}(g\omega) = -\sum_{k=1}^{n} \int_X \mathrm{d}(f_k\omega) \; .$$

- Der Beweis des Residuensatzes ist daher vollständig, wenn wir zeigen

$$\int_X \mathrm{d}(f_k\omega) \;\; = -2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_{a_k}(\omega) \; .$$

  Da der Träger von $\mathrm{d}(f_k\omega)$ in U_k enthalten ist, muss nur über U_k integriert werden. Mit Hilfe der Koordinate z_k identifizieren wir U_k mit dem Einheitskreis. Wir finden dann für jedes k Werte $0 < \epsilon < R < 1$ mit

$$\mathrm{supp}(f_k) \subset \{|z_k| < R\} \quad \text{und} \quad (f_k)|\{|z_k| \leq \epsilon\} = 1 \; .$$

  Damit ist

$$\begin{aligned} \textstyle\int_X \mathrm{d}(f_k\omega) &= \int_{\epsilon \leq |z_k| \leq R} \mathrm{d}(f_k\omega) = \int_{|z_k|=R} f_k\omega - \int_{|z_k|=\epsilon} f_k\omega \\ &= -\int_{|z_k|=\epsilon} \omega = -2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_{a_k}(\omega) \end{aligned}$$

  nach dem Residuensatz in der komplexen Ebene.

□

Eine Formulierung, die näher am klassischen Residuensatz 1.4.8 liegt, erhalten wir, wenn wir auf einen Summanden den Satz von Stokes anwenden. Sei $X' := X \setminus U'_1$ eine Fläche mit Rand $S := \partial U'_1$. Dann ist

$$\int_D \omega = \int_{\partial X'} \mathrm{d}\omega = \int_{X'} \omega = \sum_{k=2}^{n} 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_{a_k}(\omega) \; .$$

Wir finden mit Hilfe des Residuensatzes wieder Korollar 4.3.25, also eine Verallgemeinerung des dritten Satzes von Liouville 2.1.8, das wir dort mit Hilfe der Überlagerungstheorie bewiesen hatten. Auf $\mathbb{C}$ haben wir eine Standardkoordinate z. Im Falle einer elliptischen Kurve $\mathbb{C}/L$ können wir für eine meromorphe elliptische Funktion f die Differentialform $f\mathrm{d}z$ betrachten und darauf Korollar 4.6.15 anwenden. Wir erhalten so den zweiten Satz von Liouville, Theorem 2.1.5 .

Korollar 4.6.16.
Eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf einer kompakten Riemannschen Fläche hat mit Vielfachheiten gerechnet ebensoviele Nullstellen wie Pole.

Beweis.
Die Differentialform

$$\omega := \frac{\mathrm{d}f}{f}$$

ist holomorph außerhalb der Nullstellen und Pole von f. Ist $a \in X$ eine Nullstelle m-ter Ordnung von f, so gilt $\mathrm{res}_a(\omega) = m$; ist $a \in X$ eine Polstelle m-ter Ordnung von f, so gilt $\mathrm{res}_a(\omega) = -m$. Die Behauptung folgt daher aus dem Residuensatz 4.6.15, ganz so, wie wir den entsprechenden Satz für Gebiete in $\mathbb{C}$ bewiesen hatten. □

5 Kompakte Riemannsche Flächen

Wir wollen nun Hilfsmittel vorstellen, die speziell auf die Behandlung kompakter Riemannscher Flächen zugeschnitten sind. Höhepunkte dieses Kapitels sind der Satz von Riemann-Roch 5.3.12 und das Abelsche Theorem 5.5.8 in seiner allgemeinen Form.

5.1 Kohomologiegruppen

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Wir wollen ihr eine Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{F})$ zuordnen, die ein zentrales Hilfsmittel sein wird.

Betrachtung 5.1.1.

- *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, d.h. eine Familie offener Teilmengen $U_i \subset X$, deren Vereinigung X ist.*

- *Für $q = 0, 1, \ldots$ definieren wir die q-te Kokettengruppe der Garbe $\mathcal{F}$ bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$ als Produkt*

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0, \ldots i_q} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots U_{i_q}) \ .$$

Die Elemente heißen <u>Koketten</u> und bilden als Produkt abelscher Gruppen eine abelsche Gruppe.

Koketten sind also Familien von Elementen in den abelschen Gruppen, die die Garbe mehrfachen Überlapps der Überdeckung zuordnet. Man beachte, dass bei einer q-Kette $q + 1$-fache Überlapps betrachtet werden.

- *Wir definieren* Ableitungsoperatoren

$$\begin{array}{rcl} \delta: C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ \delta: C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \end{array}$$

  folgendermaßen:

  1. *Für* $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *betrachte auf dem zweifachen Überlapp* $U_i \cap U_j$ *das Element*

  $$g_{ij} := f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \quad .$$

  2. *Für* $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *betrachte auf dem dreifachen Überlapp* $U_i \cap U_j \cap U_k$ *das Element*

  $$g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k) \quad .$$

  Dies sind Gruppenhomomorphismen; wir setzen

$$\begin{array}{rcl} Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & := & \ker\left(C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U},\mathcal{F})\right) \\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & := & \mathrm{Im}\,\left(C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\right) \end{array}$$

- *Die Elemente von* $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *heißen* Kozykeln *, die Elemente von* $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ Koränder *. Eine 1-Kokette* (f_{ij}) *ist also genau dann ein Kozyklus, wenn gilt*

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{auf} \quad U_i \cap U_j \cap U_k \quad . \tag{2}$$

  Wenn man in dieser Kozyklenrelation $i = j = k$ *setzt, folgt* $f_{ii} = 0$. *Betrachtet man dann den Fall* $i = k$, *so folgt* $f_{ij} = -f_{ji}$. *Ist* (f_{ij}) *ein Korand, also* $f_{ij} = g_j - g_i$, *so ist Relation (2) offenbar erfüllt. Also sind Koränder insbesondere Kozykeln,* $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subseteq Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

  Ein 1-Kozyklus $(f_{ij})_{i,j\in I}$ *ist aber nur genau dann ein Korand, wenn es eine 0-Kokette* $(g_i)_{i\in I}$ *gibt mit*

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{über} \quad U_i \cap U_j \quad \text{für alle } i,j \in I \ .$$

Definition 5.1.2
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckng von X.

1. Die Faktorgruppe

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) := Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

   heißt erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in der Garbe $\mathcal{F}$ bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$.

2. Die Elemente von $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ nennt man Kohomologieklassen. Zwei Kozyklen in der gleichen Klasse heißen kohomolog.

Betrachtung 5.1.3.

- *Die Gruppen* $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *hängen von der Wahl der Überdeckung* $\mathcal{U}$ *ab. Wir wollen uns davon frei machen.*

- *Eine offene Überdeckung* $\mathcal{V} = (V_k)_{k\in K}$ *heißt* feiner *als eine offene Überdeckung* $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, *wenn jede offene Menge* V_k *der Überdeckung* $\mathcal{V}$ *in wenigstens einer offenen Menge* U_i *der Überdeckung* $\mathcal{U}$ *enthalten ist. Es gibt dann also wenigstens eine Abbildung* $\tau : K \to I$ *der Indexmengen der Überdeckungen mit*

$$V_k \subset U_{\tau k} \quad \text{für alle} \quad k \in K \ .$$

- *Mit Hilfe dieser Verfeinerungsabbildung τ definieren wir eine Abbildung*

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: \; Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to Z^1(\mathcal{V},\mathcal{F}) \; ,$$

  indem wir für $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ setzen $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f_{ij}) = (g_{kl})$ mit

$$g_{kl} := f_{\tau k,\tau l}|_{V_k \cap V_l} \quad \textit{für alle} \quad k,l \in K \; .$$

  Da diese Abbildung auch Koränder in Koränder überführt, induziert sie einen Homomorphismus

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: \; H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \; \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

  der Kohomologiegruppen, den wir ebenfalls mit $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ bezeichnen.

Lemma 5.1.4.

1. *Die Abbildung*

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: \; H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \; \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

   ist unabhängig von der Wahl der Verfeinerungsabbildung $\tau: \; K \to I$.

2. *Die Abbildung*

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}: \; H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \; \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

   ist injektiv.

Beweis.

1. Für zwei gegebene Verfeinerungsabbildungen $\tau, \tilde{\tau}: \; K \to I$ ist zu zeigen, dass die Kozykeln mit

$$g_{k,l} := f_{\tau k,\tau l}|_{V_k \cap V_l} \qquad \text{und} \qquad \tilde{g}_{k,l} := f_{\tilde{\tau} k,\tilde{\tau} l}|_{V_k \cap V_l}$$

   in $Z^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ kohomolog sind. Wegen $V_k \subset U_{\tau k} \cap U_{\tilde{\tau} k}$ ist

$$h_k := f_{\tau k,\tilde{\tau} k}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k)$$

   definiert, und es gilt auf $V_k \cap V_l$

$$\begin{aligned} g_{kl} - \tilde{g}_{kl} &= f_{\tau k,\tau l} - f_{\tilde{\tau} k,\tilde{\tau} l} \\ &= f_{\tau k,\tau l} + f_{\tau l,\tilde{\tau} k} - f_{\tau l,\tilde{\tau} k} - f_{\tilde{\tau} k,\tilde{\tau} l} \\ &= f_{\tau k,\tilde{\tau} k} - f_{\tau l,\tilde{\tau} l} = h_k - h_l \; , \end{aligned}$$

   wobei im dritten Schritt zwei Mal die Kozykelrelation ausgenutzt wurde.

2. Sei $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ein Kozyklus, dessen Bild in $Z^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ ein Korand ist. Zu zeigen ist, dass er auch ein Korand in $B^2(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ist. Es gebe also $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$ mit

$$f_{\tau k,\tau l} = \; g_k - g_l \quad \text{auf} \quad V_k \cap V_l \; .$$

   Wir fixieren nun einen Index i und konstruieren auf U_i einen Kandidaten für ein Urbild. Auf $U_i \cap V_k \cap V_l$ gilt dann für alle $l \in K$

$$g_k - g_l = f_{\tau k,\tau l} = f_{\tau k,i} + f_{i,\tau l} = \; f_{i,\tau l} - f_{i,\tau k} \; .$$

Die dritte und vierte Gleichheit folgen aus den Kozykelrelationen für (f_{ij}). Es folgt auf $U_i \cap V_k \cap V_l$

$$f_{i,\tau k} + g_k = f_{i,\tau l} + g_l \ .$$

Wir können also das zweite Garbenaxiom auf die Überdeckung $(U_i \cap V_k)_{k\in K}$ von U_i anwenden und finden $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit

$$h_i = f_{i,\tau k} + g_k \quad \text{auf} \quad U_i \cap V_k \ .$$

Dann gilt auf $U_i \cap U_j \cap V_k$ für alle Werte $k \in K$

$$f_{ij} = f_{i,\tau k} + f_{\tau k,j} = f_{i,\tau k} + g_k - f_{j,\tau k} - g_k = h_i - h_j \ .$$

Da dies für alle Werte von $k \in K$ gilt, folgt aus dem ersten Garbenaxiom die Gleichheit auf $U_i \cap U_j$, so dass der Kozyklus (f_{ij}) wirklich ein Korand in $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ist.

□

Betrachtung 5.1.5.

- *Offenbar gilt für drei offene Überdeckungen mit $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ die Beziehung*

$$t^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} \ .$$

Wir nennen daher zwei Kohomologieklassen $\xi \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $\xi' \in H^1(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ äquivalent, wenn sie auf einer gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ übereinstimmen. Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \lim_{\to} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \coprod_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \ / \sim \ .$$

Eine Gruppenstruktur ist durch Verknüpfung der Repräsentanten definiert. Dies ist ein induktiver Limes, also ein colimes. Es gibt für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ einen Gruppenhomomorphismus $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F})$.

- *Aus Lemma 5.1.4 folgt, dass die Abbildung*

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F})$$

injektiv ist. Man kann aber nicht unbedingt mit Hilfe einer einzigen Überdeckung alle Klassen in $H^1(X, \mathcal{F})$ detektieren, mehr dazu in Satz 5.1.8. Es ist im induktiven Limes $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ genau dann, wenn für jede offene Überdeckung gilt $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Wir wollen nun konkrete Garbenkohomologien berechnen:

Satz 5.1.6.

1. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathcal{E}$ die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf X. Dann gilt $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$.*
2. *Ebenso gilt, dass die ersten Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in den Garben $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$ und $\mathcal{E}^{(2)}$ von* glatten *Differentialformen verschwinden.*

Beweis.

In den Beweis geht ein, dass X als Riemannsche Fläche eine abzählbare Topologie hat und wir deshalb für eine beliebige Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins finden können, also eine Familie $(\psi_i)_{i\in I}$ von *glatten* Funktionen $\psi_i \in \mathcal{E}(X)$ mit

1. Die Träger sind mit der Überdeckung verträglich, $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset U_i$.
2. Jeder Punkt von X besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele der Mengen $\mathrm{supp}(\psi_i)$ trifft.
3. $\sum_{i\in I} \psi_i = 1$.

Es ist klar, dass man keine Familie *holomorpher* Funktionen mit diesen Eigenschaften finden kann.

Sei nun $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ ein Kozyklus. Die glatte Funktion $\psi_j f_{ij}$ ist auf $U_i \cap U_j$ definiert. Ihr Träger ist eine abgeschlossene Teilmenge der offenen Menge $U_i \cap U_j$. Insbesondere verschwinden auf $U_i \cap U_j \setminus \mathrm{supp}(\psi_j f_{ij})$ alle Ableitungen von $\psi_j f_{ij}$. Daher kann die Funktion durch Null als glatte Funktion auf ganz U_i fortgesetzt werden und als Element von $\mathcal{E}(U_i)$ aufgefasst werden. Setze

$$g_i := \sum_{j\in I} \psi_j f_{ij} \ ;$$

wegen Eigenschaft 2 der Zerlegung der Eins hat die Summe in der Umgebung jedes Punkts von U_i nur endlich viele von Null verschiedene Summanden, so dass wir wirklich ein Element $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$ bekommen. Für $i, j \in I$ gilt auf dem doppelten Überlapp $U_i \cap U_j$ unter Ausnützung der Kozykelrelationen

$$\begin{aligned} g_i - g_j &= \textstyle\sum_{k\in I} \psi_k f_{ik} - \sum_{k\in I} \psi_k f_{jk} = \sum_{k\in I} \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) \\ &= \textstyle\sum_{k\in I} \psi_k (f_{ik} + f_{kj}) = \sum_{k\in I} \psi_k f_{ij} = f_{ij} \ , \end{aligned}$$

so dass (f_{ij}) wirklich ein Korand ist.

Der Beweis für die Garben $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$ und $\mathcal{E}^{(2)}$ geht analog. □

Um Kohomologiegruppen explizit ausrechnen zu können, wollen wir einfach zusammenhängende offene Mengen zusammenkleben. Hierzu untersuchen wir zunächst eine Garbe auf einer einfach zusammenhängenden Menge:

Satz 5.1.7.
Sei X eine einfach zusammenhängende *Riemannsche Fläche. Bezeichne $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{Z}$ die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in den komplexen Zahlen bzw. in den ganzen Zahlen. Dann gilt*

$$H^1(X, \mathbb{C}) = 0 \quad \textit{und} \quad H^1(X, \mathbb{Z}) = 0 \ .$$

Beweis.

- Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $(c_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Da $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$, gibt es nach Satz 5.1.6 eine glatte Kokette $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ mit

  $$c_{ij} = f_j - f_i \quad \text{auf} \quad U_i \cap U_j \ .$$

  Aus $\mathrm{d}c_{ij} = 0$ folgt $\mathrm{d}f_i = \mathrm{d}f_j$ auf $U_i \cap U_j$. Es gibt also eine globale Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ mit $\omega|_{U_i} = \mathrm{d}f_i$. Wegen $\mathrm{d}\mathrm{d}f_i = 0$ ist diese Differentialform ω geschlossen. Weil X einfach zusammenhängt, gibt es nach Korollar 4.6.7.2 eine glatte Funktion $f \in \mathcal{E}(X)$ mit $\mathrm{d}f = \omega$. Wir betrachten auf U_i die glatte Funktion

  $$c_i := f_i - f|_{U_i} \ .$$

Dann ist $\mathrm{d}c_i = \mathrm{d}f_i - \mathrm{d}f = \omega - \omega = 0$ auf U_i. Also ist die Funktion c_i lokal konstant,d.h. $(c_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Auf $U_i \cap U_j$ gilt

$$c_{ij} = f_j - f_i = (f_j - f) - (f_i - f) = c_j - c_i$$

also ist (c_{ij}) ein Korand.

- Sei $(a_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Nach dem ersten Teil des Satzes existiert dann eine Kokette $(c_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ mit

  $$a_{jk} = c_k - c_j \quad \text{auf} \quad U_j \cap U_k \ .$$

  Aus $\exp(2\pi \mathrm{i} a_{jk}) = 1$ folgt $\exp(2\pi \mathrm{i} c_j) = \exp(2\pi \mathrm{i} c_k)$ auf $U_j \cap U_k$. Da X zusammenhängend ist, gibt es eine komplexe Zahl $b \in \mathbb{C}$ mit

  $$b = \exp(2\pi \mathrm{i} c_j) \quad \text{für alle} \quad j \in I \ .$$

  Wir nutzen die Surjektivität der komplexen Exponentialfunktion und finden ein $c \in \mathbb{C}$ mit $b = \exp(2\pi \mathrm{i} c)$ und setzen $a_j := c_j - c$. Wegen

  $$\exp(2\pi \mathrm{i} a_j) = \exp(2\pi \mathrm{i} c_j) \cdot \exp(-2\pi \mathrm{i} c) = 1$$

  ist a_j ganzzahlig, also $(a_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Da gilt

  $$a_{jk} = \ c_k - c_j = \ (c_k - c) - (c_j - c) \ = a_k - a_j \ ,$$

  ist (a_{jk}) ein Korand.

$\square$

Der nächste Satz hilft bei der Berechnung der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{F})$, da er Situationen beschreibt, in denen man mit nur einer einzigen Überdeckung von X arbeiten kann.

Satz 5.1.8 (Leray).
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$. Dann gilt

$$H^1(X, \mathcal{F}) \ \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad .$$

Man nennt dann $\mathcal{U}$ eine Leraysche Überdeckung erster Ordnung bezüglich der Garbe $\mathcal{F}$.

Beweis.

- Es reicht aus, zu zeigen, dass für jede Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ der Lerayschen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ die Abbildung

  $$t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}: \quad H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

  ein Isomorphismus ist. Nach Lemma 5.1.4.2 ist die Abbildung injektiv. Es bleibt nur die Surjektivität zu zeigen.

- Sei $\tau: \ A \to I$ mit $V_\alpha \subset U_{\tau\alpha}$ eine Verfeinerungsabbildung. Wir geben uns einen Kozykel $(f_{\alpha,\beta}) \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ vor und müssen $(F_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ finden, so dass

  $$(F_{\tau\alpha,\tau\beta}) - (f_{\alpha,\beta})$$

  ein Korand für die Überdeckung $\mathcal{V}$ ist.

- Die Familie $(U_i \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist eine offene Überdeckung der offenen Menge U_i, die wir mit $U_i \cap \mathcal{V}$ bezeichnen. Nach Voraussetzung ist insbesondere $H^1(U_i \cap \mathcal{V}, \mathcal{F}) = 0$, weshalb $g_{i\alpha} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_\alpha)$ existieren mit
$$f_{\alpha,\beta} = g_{i\alpha} - g_{i\beta} \quad \text{auf} \quad U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta \;.$$
Damit gilt auf dem doppelten Überlapp $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$ der Überdeckung $U_i \cap U_j \cap \mathcal{V}$ von $U_i \cap U_j$ sicher $f_{\alpha,\beta} = g_{i,\alpha} - g_{i,\beta} = g_{j,\alpha} - g_{j,\beta}$ und somit
$$g_{j\alpha} - g_{i\alpha} = g_{j\beta} - g_{i\beta}$$
und es gibt nach dem zweiten Garbenaxiom Elemente $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ mit
$$F_{ij} = g_{j,\alpha} - g_{i\alpha} \quad \text{auf} \quad U_i \cap U_j \cap V_\alpha \;.$$

- Es ist klar, dass F in $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ liegt, also geschlossen ist. Wir setzen
$$h_\alpha := g_{\tau\alpha,\alpha} | V_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha) \;.$$
Dann gilt über $V_\alpha \cap V_\beta$
$$\begin{array}{rcl} F_{\tau\alpha,\tau\beta} - f_{\alpha\beta} & = & (g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\tau\alpha,\alpha}) - (g_{\tau\beta,\alpha} - g_{\tau\beta,\beta}) \\ & = & g_{\tau\beta,\beta} - g_{\tau\alpha,\alpha} = h_\beta - h_\alpha \;, \end{array}$$
also zerfällt die Differenz $F_{\tau\alpha,\tau\beta} - f_{\alpha\beta}$.

□

Beispiel 5.1.9.
Als Anwendung wollen wir zeigen, dass
$$H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$
gilt. Wir wählen eine offene Überdeckung mit zwei Karten, wobei U_1 die komplexe Ebene ohne die positive reelle Achse und U_2 die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse ist. Da die Gebiete beide sternförmig, also einfach zusammenhängend sind, gilt nach Satz 5.1.7 $H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$. Es liegt also für die Garbe $\mathbb{Z}$ eine Leraysche Überdeckung vor. Es ist nach Satz 5.1.8 dann $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$.

Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ besteht aus der oberen und der unteren komplexen Halbebene und hat zwei Zusammenhangskomponenten. Da ein Kozyklus $(a_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ nach Betrachtung 5.1.1 alternierend ist, also
$$a_{11} = a_{22} = 0 \quad \textit{und} \quad a_{12} = -a_{21}$$
gilt, ist
$$Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;.$$
Da U_i zusammenhängt, ist $\mathbb{Z}(U_i) = \mathbb{Z}$ und somit $C^0(\mathcal{U}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Der Ableitungsoperator ist dann
$$\begin{array}{rrcl} \delta: & C^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & (b_1, b_2) & \mapsto & (b_2 - b_1, b_2 - b_1) \end{array}$$
Also ist $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;/\; \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Ähnlich zeigt man $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

Betrachtung 5.1.10.

- *Wir betrachten zum Abschluss noch die nullte Kohomologiegruppe. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir setzen*

$$\begin{array}{rcl} Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) & := & \ker\left(C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \stackrel{\delta}{\to} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\right) \\ B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) & := & 0 \\ H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) & := & Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\ / B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \end{array}$$

  Eine 0-Kokette $(f_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ liegt genau dann in $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$, wenn

$$f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$$

  für alle $i,j \in I$ gilt. Nach dem zweiten Garbenaxiom setzen sich dann die Elemente f_i auf U_i zu einem globalen Element $f \in \mathcal{F}(X)$ zusammen. Wir haben daher eine natürliche Isomorphie:

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \ = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)\ ,$$

  so dass die Gruppen $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ nicht von der Überdeckung $\mathcal{U}$ abhängen. Man definiert

$$H^0(X,\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X) \quad .$$

- *Man kann auch folgendermaßen vorgehen: zu einer Riemannschen Fläche X assoziiert man die Kategorie $Sh(X)$ der Garben abelscher Gruppen auf X. Die Morphismen in dieser Kategorie werden in Definition 5.2.1 noch erklärt werden. Die Kategorie $Sh(X)$ ist eine abelsche Kategorie und der <u>globale Schnittfunktor</u> ist ein Funktor mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen,*

$$\begin{array}{rrcl} H^0(X,-): & Sh(X) & \to & Ab \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(X) \end{array}$$

  Es stellt sich heraus, dass dann der Funktor $H^i(X,-)$ isomorph zum i-ten abgeleiteten Funktor von $H^0(X,-)$ ist.

Um weiter zu kommen, müssen wir ein wenig mehr Resultate aus der Analysis benutzen. Sie sind alle Spezialfälle des Dolbeaut'schen Lemmas.

Satz 5.1.11.

1. *Zu jeder glatten Funktion $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit kompakten Träger gibt es eine glatte Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit*
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g\ .$$
2. *Sei $X := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$ eine offene Kreisscheibe mit Radius $0 < R \leq \infty$ und $g \in \mathcal{E}(X)$. Dann existiert $f \in \mathcal{E}(X)$ mit*
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g\ .$$

Beweis.
Wir skizzieren nur die Ideen:

- Man definiert $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch
$$f(\zeta) =:= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$$
Man muss natürlich dann zeigen, dass das Integral trotz der Singularität für $z = \zeta$ existiert und eine in ζ differenzierbare Funktion definiert.

- Man schließt dies durch eine Ausschöpfung von Kreisscheiben mit Funktionen mit kompakten Trägern auf diesen Kreisscheiben.

□

Korollar 5.1.12.
Sei $X := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$ eine Kreisscheibe mit Radius $0 < R \leq \infty$. Dann gibt es zu jeder glatten Funktion $g \in \mathcal{E}(X)$ eine glatte Funktion $f \in \mathcal{E}(X)$ mit $\Delta f = g$. Dabei ist
$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$$
der Laplace-Operator.

Beweis.
Sei $f_1 \in \mathcal{E}(X)$ eine Funktion mit $\overline{\partial} f_1 = g$, die nach Satz 5.1.11.2 existiert. Sei dann $f_2 \in \mathcal{E}(X)$ eine Funktion mit $\overline{\partial} f_2 = \overline{f}_1$. Dann ist
$$\Delta(\frac{1}{4}\overline{f}_2) = \frac{\partial^2 \overline{f}_2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{\left(\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}} \right)} = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}} = g \ .$$

□

Satz 5.1.13.
Sei $X := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$ eine Kreisscheibe mit Radius $0 < R \leq \infty$. Dann gilt $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

Beweis.

- Sei $\mathcal{U} = (U_i)$ eine offene Überdeckung von X und $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ ein Kozyklus. Da $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ und nach Satz 5.1.6 ferner $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ gilt, gibt es eine glatte Kokette $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ mit
$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{auf} \quad U_i \cap U_j \ .$$

- Aus $\overline{\partial} f_{ij} = 0$ folgt dann $\overline{\partial} g_i = \overline{\partial} g_j$ auf $U_i \cap U_j$, also gibt es eine globale glatte Funktion $h \in \mathcal{E}(X)$ mit $h|U_i = \overline{\partial} g_i$. Nach Satz 5.1.11 können wir eine glatte Funktion $g \in \mathcal{E}(X)$ finden mit $\overline{\partial} g = h$.

- Wir definieren
$$f_i := g_i - g \ ;$$
wegen $\overline{\partial} f_i = \overline{\partial} g_i - \overline{\partial} g = 0$ ist f_i holomorph, also $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Außerdem gilt über $U_i \cap U_j$
$$f_j - f_i = g_j - g_i = f_{ij} \ ,$$
so dass unser ursprünglicher Kozyklus $(f_{i,j})$ ein Korand ist.

□

Satz 5.1.14.
Für die Riemannsche Zahlenkugel gilt $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}) = 0$.

Beweis.

- Wir betrachten die Überdeckung
$$U_1 := \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\} \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{P}_1 \setminus \{0\}$$
Da beide Gebiete zu $\mathbb{C}$ biholomorph sind, folgt aus Satz 5.1.13, dass $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$ gilt. Also ist $\mathcal{U}$ eine Leraysche Überdeckung von $\mathbb{P}_1$ bezüglich der Garbe $\mathcal{O}$. Es gilt daher
$$H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \ .$$

- Es ist also zu zeigen, dass jeder Kozyklus $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ zerfällt. Dazu müssen wir Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ finden mit
$$f_{12} = f_2 - f_1 \quad \text{auf} \quad U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*.$$

- Es sei
$$f_{12}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$
die Laurententwicklung von f_{12} auf $\mathbb{C}^*$. Wir benutzen die Zerlegung von f_{12} in Haupt- und Nebenteil aus Satz 1.4.1 und setzen
$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{und} \quad f_2(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \ .$$
Dann gilt $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ und $f_1 - f_2 = f_{12}$.

□

Wir brauchen noch ein weiteres Endlichkeitsresultat:

Betrachtung 5.1.15.
Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X.

Für jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X ist $\mathcal{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Man hat eine natürliche Beschränkungsabbildung
$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to Z^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F})$$
die einen Homomorphismus
$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathcal{F})$$
induziert.

Im Falle $Y \subset Y' \subset X$ ist die Beschränkung von X auf Y natürlich gleich der Verkettung der Beschränkungsabbldungen von X auf Y' und von Y' auf Y.

Mit Hilfe analytischer Methoden kann man nun zeigen:

Satz 5.1.16.
Sei X eine Riemannsche Fläche und seien $Y_1 \subset\subset Y_2 \subset\subset X$ jeweils relativ kompakte offene Teilmengen. Dann hat der Beschränkungshomomorphismus

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \ \to H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

endlich-dimensionales Bild.

Satz 5.1.17.
Für jede kompakte *Riemannsche Fläche X gilt*

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}) \ < \infty \ .$$

Beweis.
Da X kompakt ist, kann man im vorigen Satz $Y_1 = Y_2 = X$ wählen. □

Definition 5.1.18
Für eine kompakte *Riemannsche Fläche X heißt*

$$g := \ \dim H^1(X, \mathcal{O})$$

das Geschlecht von X

Nach Satz 5.1.14 hat zum Beispiel die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$ das Geschlecht Null.
Wir wollen unsere Ergebniss noch zur Konstruktion meromorpher Funktionen benutzen.

Satz 5.1.19.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset\subset X$ eine relativ-kompakte offene Teilmenge. Dann gibt es zu jedem Punkt $a \in Y$ eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(Y)$, die in a einen Pol hat und in $Y \setminus \{a\}$ holomorph ist.

Beweis.

- Nach Satz 5.1.16 ist

$$k := \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \left(H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O})\right) < \infty \ .$$

- Sei (U_1, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $z(a) = 0$. Setze $U_2 := X \setminus \{a\}$. Dann ist $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ eine offene Überdeckung von X. Die in $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$ holomorphen Funktionen z^{-j} repräsentieren Kozykeln

$$\zeta_j \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

für $j = 1, \ldots, k + 1$.

- Wegen $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\,(H^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) \to\ H^1(\mathcal{U}\cap Y,\mathcal{O}) < k+1$, sind die Kozykeln $\zeta_j|\ Y \in Z^1(\mathcal{U}\cap Y,\mathcal{O})$ mit $1 \leq j \leq k+1$ modulo den Korändern linear abhängig. Es gibt also komplexe Zahlen c_i, die nicht alle Null sind, und eine Kokette $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathcal{U}\cap Y,\mathcal{O})$ mit

  $$c_1\zeta_1 + \ldots c_{k+1}\zeta_{k+1} = \delta\eta \quad \text{bezüglich der Überdeckung} \quad \mathcal{U}\cap Y \quad ,$$

  also

  $$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{auf} \quad U_1 \cap U_2 \cap Y \quad .$$

- Es gibt nach dem zweiten Garbenaxiom angewandt auf die Überdeckung $(U_1\cap Y, U_2\cap Y)$ von Y eine Funktion $f \in \mathcal{M}(Y)$, die auf $U_1 \cap Y$ mit

  $$f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$$

  übereinstimmt – also einen Pol in a hat – und in $U_1 \cap Y = Y \setminus \{a\}$ gleich f_2 ist – also holomorph ist. Dies ist die gesuchte Funktion.

□

Wir benutzen dieses Resultat, um die Reichhaltigkeit der meromorphen Funktionen zu untersuchen:

Korollar 5.1.20.
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ paarweise verschiedene Punkte von X. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen komplexen Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(a_i) = c_i$.

Beweis.
Für jedes Paar $i \neq j$ gibt es nach dem vorangegangenen Satz 5.1.19 eine meromorphe Funktion $f_{ij} \in \mathcal{M}(X)$, die in a_i einen Pol hat und in a_j holomorph ist. Für die Funktion

$$g_{ij} := \frac{f_{ij} - f_{ij}(a_j)}{f_{ij} - f_{ij}(a_j) + 1}$$

gilt $g_{ij}(a_i) = 1$ und $g_{ij}(a_j) = 0$. Die Funktionen

$$h_i := \prod_{j\neq i} g_{ij} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

erfüllen $h_i(a_j) = \delta_{ij}$, also ist

$$f := \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$$

eine Lösung unseres Problems. □

Im Spezialfall $X = \mathbb{P}^1$ erhalten wir die bekannte Aussage, dass wir zu endlich vielen vorgeschriebenen komplexen Werten für endlich viele Punkte auf $\mathbb{P}^1$ eine rationale Funktion finden können.

5.2 Die exakte Kohomologiesequenz

Wir brauchen nun Morphismen von Garben.

Definition 5.2.1
Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen über einem topologischen Raum X. Ein Garbenhomomorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \quad \text{für alle } U \text{ offen in } X \ ,$$

die mit den Beschränkungsabbildungen verträglich sind, d.h. für jedes Paar offener Mengen $U, V \subset X$ mit $V \subset U$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

Sind alle Morphismen α_U Isomorphismen, so heißt α Isomorphismus von Garben.

Bemerkungen 5.2.2.

1. *Ableitungsoperatoren liefern Garbenhomomorphismen, etwa*

$$\mathrm{d} : \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{(1)}, \quad \mathrm{d} : \ \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)} \ .$$

2. *Die natürlichen Inklusionen $\mathcal{O} \to \mathcal{E}$, $\mathbb{C} \to \mathcal{E}$, $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}$ etc. liefern Garbenhomomorphismen.*

3. *Sei $\mathcal{O}^*$ die multiplikative Garbe der holomorphen Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}^*$. Dann liefert*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{ex}_U : & \mathcal{O}(U) & \to & \mathcal{O}^*(U) \\ & f & \mapsto & \exp(2\pi \mathrm{i} f) \end{array}$$

einen Garbenhomomorphismus $\mathrm{ex} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$.

4. *Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus auf einem topologischen Raum X. Für jede offene Menge $U \subset X$ setze*

$$\mathcal{K}(U) := \ker(\mathcal{F}(U) \stackrel{\alpha_U}{\to} \mathcal{G}(U)\ ) \ .$$

Dies definiert mit den Restriktionen der Einschränkungsabbildungen eine Garbe $\mathcal{K} =: \ker \alpha$. Beispiele sind

   (a) *Die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen ist der Kern des Ableitungsoperators d'': $\mathcal{O} = \ker(\mathcal{E} \stackrel{\mathrm{d}''}{\to} \mathcal{E}^{0,1})$.*

   (b) *Die Garbe Ω der holomorphen Einsformen ist der Kern des Ableitungsoperators d, also: $\Omega = \ker(\mathcal{E}^{1,0} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{E}^2)$.*

   (c) *Für die Garbe $\mathbb{Z}$ der lokal-konstanten Funktionen mit Werten in $\mathbb{Z}$ gilt $\mathbb{Z} = \ker(\mathcal{O} \stackrel{\mathrm{ex}}{\to} \mathcal{O}^*)$.*

5. *Betrachtet man dagegen die Bilder*

$$\mathcal{B}(U) := \operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) \quad \textit{für} \quad U \textit{ offen in } X,$$

wiederum mit den Restriktionen der Einschränkungsabbildungen, so erhält man eine Prägarbe, die im allgemeinen nicht das zweite Garbenaxiom erfüllt: man kann im allgemeinen nicht Elemente, die lokal als Bild geschrieben werden und die auf doppelten Überlapps übereinstimmen, global als Bild schreiben.

Als Gegenbeispiel betrachten wir den Garbenmorphismus $\mathrm{ex} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ *auf der Riemannschen Fläche* $X = \mathbb{C}^*$. *Wir überdecken* X *mit* $U_1 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ *und* $U_2 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *und betrachten* $f_k(z) = z$ *für* $k = 1, 2$. *Da die beiden offene Mengen* U_1 *und* U_2 *einfach zusammenhängend sind, existieren auf ihnen nach Satz 4.2.1 holomorphe Logarithmen. Es liegen daher für* $k = 1, 2$

$$f_k \in \operatorname{Im}(\mathcal{O}(U_k) \stackrel{\mathrm{ex}}{\to} \mathcal{O}^*(U_k)) \ .$$

Die Funktionen stimmen auch auf dem Überlapp überein, $(f_1)|_{U_1 \cap U_2} = (f_2)|_{U_1 \cap U_2}$. *Es gibt aber kein globales Element*

$$f \in \operatorname{Im}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \to \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*))$$

mit $f|_{U_k} = f_k$, *da es keine globale Logarithmusfunktion auf* $\mathbb{C}^*$ *gibt.*

Definition 5.2.3
Ein Garbenhomomorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *induziert für jedes* $x \in X$ *einen Homomorphismus*

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

der Halme.

1. *Eine Sequenz von Garbenhomomorphismen* $\mathcal{F} \stackrel{\alpha}{\to} \mathcal{G} \stackrel{\beta}{\to} \mathcal{H}$ *heißt* <u>*exakt*</u>, *falls für jedes* $x \in X$ *die Sequenz*

$$\mathcal{F}_x \stackrel{\alpha_x}{\to} \mathcal{G}_x \stackrel{\beta_x}{\to} \mathcal{H}_x$$

   exakt ist, also $\ker \beta_x = \operatorname{Im} \alpha_x$ *für alle* $x \in X$ *gilt.*

2. *Ein Garbenmorphismus* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *heißt* <u>*Monomorphismus*</u>, *falls die Sequenz* $0 \to \mathcal{F} \stackrel{\alpha}{\to} \mathcal{G}$ *exakt ist, und* <u>*Epimorphismus*</u>, *falls* $\mathcal{F} \stackrel{\alpha}{\to} \mathcal{G} \to 0$ *exakt ist.*

Bemerkungen 5.2.4.

1. *Ist* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *ein Garbenmonomorphismus, so ist für jede offene Teilmenge* $U \subset X$ *die Abbildung* $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ *injektiv.*

   Denn sei $f \in \mathcal{F}(U)$ *mit* $\alpha_U(f) = 0$. *Da* $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ *für jedes* $x \in U$ *injektiv ist, gibt es zu jedem* $x \in U$ *eine offene Umgebung* $V_x \subset U$ *mit* $f_{|V_x} = 0$. *Mit Hilfe des ersten Garbenaxioms, der Eindeutigkeit, folgt daraus* $f = 0$.

2. *Dagegen ist bei einem Garbenepimorphismus nicht notwendigerweise für jede offene Menge* $U \subset X$ *die Abbildung* $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ *surjektiv. Zum Beispiel ist* $\mathrm{ex} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ *auf Keimen surjektiv, da lokal holomorphe Logarithmen existieren, aber* $\mathrm{ex} : \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \to \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ *ist nicht surjektiv.*

Satz 5.2.5.
Ist $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ *eine exakte Garbensequenz, so ist für jede offene Menge* $U \subset X$ *die Sequenz*

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$$

exakt.

Beweis.

- Die Exaktheit von
$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U)$$
wurde bereits in Bemerkung 5.2.4 beweisen.

- Wir zeigen $\operatorname{Im} \alpha_U \subset \ker \beta_U$.
Sei $f \in \mathcal{F}(U)$ und $g = \alpha_U(f)$. Da für jedes $x \in U$ die Sequenz der Halme
$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$
exakt ist, besitzt jeder Punkt $x \in U$ eine Umgebung $V_x \in U$, so dass $\beta(g)|V_x = 0$. Aus dem ersten Garbenaxiom, der Eindeutigkeit, folgt dann $\beta(g) = 0$.

- Zum Beweis der Inklusion $\ker \beta_U \subset \operatorname{Im} \alpha_U$ geben wir uns ein Element $g \in \mathcal{G}(U)$ vor, für das $\beta_U(g) = 0$ gilt. Für jeden Punkt $x \in X$ gilt $\ker \beta_x = \operatorname{Im} \alpha_x$, also gibt es eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von U und Elemente $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ mit $\alpha(f_i) = g|_{V_i}$ für alle $i \in I$.

  Auf dem Durchschnitt $V_i \cap V_j$ gilt dann $\alpha(f_i - f_j) = 0$. Mit Bemerkung 5.2.4.1 folgt daraus $f_i = f_j$ auf $V_i \cap V_j$. Das zweite Garbenaxiom für die Garbe $\mathcal{F}$ garantiert uns nun die Existenz von $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{V_i} = f_i$ für alle $i \in I$. Da $\alpha(f)|_{V_i} = \alpha(f|_{V_i}) = \alpha(f_i) = g|_{V_i}$ gilt, folgt aus dem ersten Garbenaxiom für die Garbe $\mathcal{G}$, dass $\alpha(f) = g$ gilt.

□

Beispiele 5.2.6.
Wir geben Beispiele von kurzen exakten Garbensequenzen auf Riemannschen Flächen an:

1. $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{d}''} \mathcal{E}^{0,1} \to 0$, *wobei die Exaktheit bei* $\mathcal{E}^{0,1}$ *aus dem Dolbeautschen Lemma 5.1.11.2 angewandt, auf die Koeffizientenfunktion, folgt.*

2. *Sei* $\mathcal{Z} := \ker(\mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)})$ *die Garbe der geschlossenen Differentialformen vom Grad 1. Die Sequenz von Garben*
$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{Z} \to 0$$
ist exakt. Denn $\mathrm{d} : \mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ *ist ein Epimorphismus von Garben, weil* lokal *nach Bemerkung 4.6.4.4 jede geschlossene Differentialform exakt ist. Das holomorphe Analogon hierzu ist die exakte Sequenz von Garben*
$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega \to 0 \ .$$

3. *Die Sequenz von Garben*
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{ex}} \mathcal{O}^* \to 0$$
ist wegen Bemerkung 5.2.2.4 (c) und der lokalen Surjektivität von ex *exakt.*

4. *Wir wissen schon, dass die holomorphen Einsformen* Ω *sich als Kern schreiben lassen,* $\Omega = \ker(\mathcal{E}^{1,0} \to \mathcal{E}^{(2)})$. *Für den Beweis der Exaktheit der Sequenz*

$$0 \to \Omega \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

muss noch gezeigt werden, dass d *ein Epimorphismus von Garben ist. In einer lokalen Karte* (U, z) *ist*

$$\mathrm{d}(f\mathrm{d}z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z \ .$$

Für jede offene Menge $V \subset U$, *für die* $z(V) \subset \mathbb{C}$ *eine Kreisscheibe ist, folgt aus dem Dolbeautschen Lemma 5.1.11.2, dass*

$$\mathrm{d} : \mathcal{E}^{(1,0)}(V) \to \mathcal{E}^{(2)}(V)$$

surjektiv ist. Deshalb ist d *auch auf allen Halmen surjektiv.*

Betrachtung 5.2.7.

- *Ein Garbenhomomorphismus* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *induziert Homomorphismen von Kohomologiegruppen*

$$\begin{array}{rcl} \alpha^0 : H^0(X, \mathcal{F}) & \to & H^0(X, \mathcal{G}) \\ \alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) & \to & H^1(X, \mathcal{G}) \ . \end{array}$$

Hierbei ist $\alpha^0 := \alpha_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$.

Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ *eine offene Überdeckung von* X. *Die Abbildung*

$$\alpha_{\mathcal{U}} : \ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

ordnet einer Kokette $\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ *die Kokette*

$$\alpha_{\mathcal{U}}(\xi) := (\alpha(f_{ij})) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

zu. Da dabei Kozykeln in Kozyklen und Koränder in Koränder überführt werden, haben wir einen Homomorphismus

$$\overline{\alpha}_{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \ .$$

Durchläuft man alle offenen Überdeckungen, so erhält man den Homomorphismus α^1.

- *Gegeben sei eine exakte Garbensequenz*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

auf einem topologischen Raum X. *Wir definieren den sogenannten* *Verbindungshomomorphismus*

$$\delta^* : \ H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \ .$$

Sei $h \in H^0(X, \mathcal{H}) = \mathcal{H}(X)$. *Da alle Homomorphismen* $\beta_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ *auf Halmen surjektiv sind, gibt es eine offene Überdeckung* $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ *von* X *und eine Kokette* $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ *mit*

$$\beta_{U_i}(g_i) = \ h|_{U_i} \quad \text{für alle} \quad i \in I \ .$$

Auf $U_i \cap U_j$ finden wir daher $\beta(g_j - g_i) = 0$. Nach Satz 5.2.5 gibt es ein $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ mit

$$\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i \ .$$

Nun gilt auf dem dreifachen Überlapp $U_i \cap U_j \cap U_k$ die Gleichung $\alpha(f_{ij}+f_{jk}-f_{ik}) = 0$. Nach Bemerkung 5.2.4.1 ist α auf offenen Teilmengen injektiv, also folgt daraus $f_{ij}+f_{jk}-f_{ik} = 0$, also $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sei nun $\delta^*(h) \in H^1(X, \mathcal{F})$ die durch (f_{ij}) repräsentierte Kohomologieklasse. Man überlegt sich, dass diese Klasse unabhängig von den getroffenen Wahlen ist.

Satz 5.2.8 (Exakte Kohomologiesequenz)**.**
Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

eine exakte Sequenz von Garben auf X. Dann ist die induzierte Sequenz

$$\begin{array}{rl} 0 \to & H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X,\mathcal{H}) \quad \xrightarrow{\delta^*} \\ & H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X,\mathcal{H}) \end{array}$$

der Kohomologiegruppen exakt.

Für den Beweis verweisen wir auf das Buch von Forster.

Satz 5.2.9.
Sei

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

eine exakte Sequenz von Garben auf einem topologischen Raum X. Es gelte $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Dann gilt

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X) \ / \beta_X \mathcal{G}(X) \ .$$

Beweis.
Wegen der Annahme $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ liefert Satz 5.2.8 über die exakte Kohomologiesequenz eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \to 0 \,.$$

□

Wir erhalten so

Satz 5.2.10 (Satz von Dolbeault)**.**
Auf jeder Riemannschen Fläche hat man Isomorphismen

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X) \ / \mathrm{d}'' \mathcal{E}(X)$$

und

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)} / \mathrm{d} \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \ .$$

Beweis.
Wegen Satz 5.1.6 gilt für die Garben *glatter* Differentialformen $H^1(X, \mathcal{E}^{0,1}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(2)}) = 0$. Die Behauptung folgt nun mit Hilfe der exakten Sequenzen in Beispiel 5.2.6, Teil 2 und 4, aus Satz 5.2.9. □

Betrachtung 5.2.11.
Da auf einer Riemannschen Fläche X jede exakte Differentialform geschlossen ist, aber nicht notwendigerweise jede geschlossene Differentialform exakt ist, betrachtet man die erste de Rhamsche Gruppe von X

$$\mathrm{Rh}^1(X) := \frac{\ker(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}^{(2)}(X))}{\mathrm{Im}\,(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}^{(1)}(X))}$$

Es ist also $\mathrm{Rh}^1(X) = 0$ genau dann, wenn jede geschlossene glatte Einsform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine glatte Stammfunktion besitzt. Wir wissen aus Korollar 4.6.7.2, dass $\mathrm{Rh}^1(X) = 0$ gilt, wenn X einfach zusammenhängend ist.

Satz 5.2.12.
Auf jeder Riemannschen Fläche gilt

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Rh}^1(X) \ .$$

Beweis.
Die zweite exakte Sequenz aus Beispiel 5.2.6, also

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{Z} \to 0 \ ,$$

liefert mit Satz 5.2.9 die Isomorphismen

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathcal{Z}(X)/\ \mathrm{d}\mathcal{E} \equiv \mathrm{Rh}^1(X) \ .$$

□

Alle Betrachtungen dieses Abschnitts haben Verallgemeinerungen auf differenzierbare bzw. komplexe Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension.

5.3 Der Satz von Riemann-Roch

Definition 5.3.1

1. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein Divisor auf X ist eine Abbildung*

$$D: \ X \to \mathbb{Z}$$

   mit der Eigenschaft, dass zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ nur endlich viele Punkte $x \in K$ existieren mit $D(x) \neq 0$.

2. *Bezüglich der Addition bildet die Menge aller Divisoren auf X eine abelsche Gruppe, die wir mit $\mathrm{Div}(X)$ bezeichnen.*

3. *Auf der Gruppe* $\mathrm{Div}(X)$ *führen wir eine Halbordnung ein, indem wir setzen* $D \leq D'$, *falls* $D(x) \leq D'(x)$ *für alle* $x \in X$.

Beispiele 5.3.2.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ offen.

- *Für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(Y)$ und $a \in Y$ definiert man*

$$\mathrm{ord}_a(f) := \begin{cases} 0, & \textit{falls } f \textit{ in } a \textit{ holomorph und ungleich Null ist.} \\ k, & \textit{falls } f \textit{ in } a \textit{ eine Nullstelle } k\textit{-ter Ordnung hat.} \\ -k, & \textit{falls } f \textit{ in } a \textit{ einen Pol } k\textit{-ter Ordnung hat.} \\ \infty, & \textit{falls } f \textit{ in einer Umgebung von } a \textit{ identisch 0 ist.} \end{cases}$$

  Für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ ist die Abbildung $x \mapsto \mathrm{ord}_x(f)$ ein Divisor auf X, der der Divisor von f heißt und mit (f) bezeichnet wird.

- *Eine meromorphe Funktion f heißt ein Vielfaches eines Divisors D, falls $(f) \geq D$ gilt. Also ist eine meromorphe Funktion f genau dann holomorph, wenn $(f) \geq 0$ gilt.*

- *Für eine meromorphe Einsform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ erklärt man die Ordnung in einem Punkt $a \in Y$ folgendermaßen: Man wähle eine Koordinatenumgebung (U, z) von a. In $U \cap Y$ schreibt sich ω in der Form $\omega = f\mathrm{d}z$ mit einer meromorphen Funktion f. Man setzt* $\mathrm{ord}_a(\omega) = \mathrm{ord}_a(f)$.

- *Auch für eine meromorphe Differentialform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ ist die Abbildung $x \mapsto \mathrm{ord}_x(\omega)$ ein Divisor (ω) auf X. Es gelten für $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ und $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ die Beziehungen*

$$(fg) = (f) + (g)\ , \quad (\frac{1}{f}) = -(f) \quad \textit{und} \quad (f\omega) = (f) + (\omega) \quad .$$

Definition 5.3.3

1. *Ein Divisor heißt Hauptdivisor. wenn es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ gibt, so dass $D = (f)$ gilt. Zwei Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ heißen äquivalent, wenn ihre Differenz $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.*

2. *Ein kanonischer Divisor ist ein Divisor einer meromorphen Differentialform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ vom Grad Eins.*

   Da es zu je zwei Einsformen $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ eine nicht-verschwindende meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ gibt mit $\omega_1 = f\omega_2$, gilt $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$. Je zwei kanonische Divisoren sind also äquivalent.

3. *Sei X nun eine* kompakte *Riemannsche Fläche. Für jedes $D \in \mathrm{Div}(X)$ ist dann $D(x) \neq 0$ nur für endlich viele Punkte $x \in X$. Man kann daher den Grad eines Divisors definieren durch*

$$\begin{array}{rcl} \deg : \mathrm{Div}(X) & \to & \mathbb{Z} \\ D & \mapsto & \sum_{x \in X} D(x) \end{array}$$

Bemerkungen 5.3.4.

1. *Die Abbildung* deg *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

2. *Nach Korollar 4.6.16 hat eine meromorphe Funktion f auf einer kompakten Riemannschen Fläche mit Vielfachheit gerechnet so viele Nullstellen wie Pole. Für einen Hauptdivisor (f) auf einer kompakten Riemannschen Fläche gilt daher* $\deg(f) = 0$. *Deshalb haben äquivalente Divisoren gleichen Grad und die Gradfunktion faktorisiert auf Divisorklassen.*

3. *Offenbar folgt aus $D' \geq D$ für den Grad* $\deg D' \geq \deg D$.

Definition 5.3.5
Sei D ein Divisor auf einer Riemannschen Fläche X. Für eine offene Menge $U \subset X$ betrachte

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) : \mathrm{ord}_x(f) \geq -D(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U\} \ ,$$

also alle meromorphen Funktionen auf U, die Vielfache von $-D$ sind. Zusammen mit den natürlichen Einschränkungsabbildungen erhalten wir eine Garbe $\mathcal{O}_D$.

Bemerkungen 5.3.6.

1. *Speziell für den Nulldivisor $D = 0$ erhalten wir die Garbe der holomorphen Funktionen, $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$.*

2. *Sind $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ äquivalente Divisoren, so sind die Garben $\mathcal{O}_D$ und $\mathcal{O}_{D'}$ isomorph: sei $\psi \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ mit $D - D' = (\psi)$. Dann liefert die Multiplikation mit (Einschränkungen von) ψ*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_D & \to & \mathcal{O}_{D'} \\ f & \mapsto & \psi f \end{array}$$

   ein Garbenisomorphismus.

Satz 5.3.7.
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Divisor mit $\deg\ D < 0$. *Dann gilt $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.*

Beweis.
Sei $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und wäre $f \neq 0$. Dann wäre $(f) \geq -D$, also nach Bemerkung 5.3.4.3

$$\deg(f) \ \geq -\deg D > 0 \ ,$$

im Widerspruch zur Tatsache aus Bemerkung 5.3.4, dass jeder Hauptdivisor (f) Grad null hat.
□

Definition 5.3.8
Sei $P \in X$ ein Punkt auf einer Riemannschen Fläche X. Wir definieren eine Garbe $\mathbb{C}_P$ auf X, die sogenannte <u>*Wolkenkratzer-Garbe*</u>*, durch*

$$\mathbb{C}_P(U) := \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{falls } P \in U \\ 0 & \text{falls } P \notin U \end{cases}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsmorphismen.

Lemma 5.3.9.
Es gilt für die Wolkenkratzer-Garbe

$$H^0(X, \mathbb{C}_P) \;\cong \mathbb{C} \qquad \textit{und} \qquad H^1(X, \mathbb{C}_P) = 0 \ .$$

Beweis.
Die erste Behauptung folgt aus $P \in X$ und der Tatsache, dass $H^0(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}_P(X) = \mathbb{C}$ gilt.

Für jede Kohomologieklasse $\xi \in H^1(X, \mathbb{C}_P)$ gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X, so dass ξ durch einen Kozykel in $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_P)$ repräsentiert wird. Es gibt dann eine Verfeinerung $\mathcal{V}$ der Überdeckung $\mathcal{U}$, so dass der Punkt P in nur *einer* offenen Menge V_α liegt. Auch bezüglich der Überdeckung $\mathcal{V}$ kann die Kohomologieklasse durch einen Kozykel dargestellt werden. In dieser Verfeinerung gilt dann aber $Z^1(\mathcal{V}, \mathbb{C}_P) = 0$, denn kein Schnitt $V_\alpha \cap V_\beta$ mit $\alpha \neq \beta$ kann P enthalten. Also ist $\xi = 0$. □

Betrachtung 5.3.10.

- *Sei nun D ein beliebiger Divisor auf X. Für einen Punkt $P \in X$ bezeichnen wir auch mit P den Divisor, der nur auf P den Wert Eins hat und sonst verschwindet. Dann gilt $D \leq D + P$.*

- *Seien allgemeiner D und D' zwei Divisoren auf einer Riemannschen Fläche X mit $D \leq D'$. Dann ist $\mathcal{O}_D(U) \subset \mathcal{O}_{D'}(U)$ für jede offene Menge $U \subset X$, denn aus $(f) \geq -D$ folgt dann $(f) \geq -D'$.*

- *Sei nun $P \in X$ ein Punkt und (U, z) eine Koordinatenumgebung von P mit $z(P) = 0$. Wir definieren einen Garbenmorphismus auf die Wolkenkratzergarbe*

  $$\beta : \ \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P \quad .$$

  Sei $U \subset X$ offen. Gilt $P \notin U$, so ist β_U der Nullmorphismus. Ist $P \in U$ und $f \in \mathcal{O}_{D+P}(U)$, so können wir die Funktion f um den Punkt P in der lokalen Koordinate z in eine Laurentreihe entwickeln:

  $$f = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n$$

  mit $k = D(P)$. Wir setzen

  $$\beta_U(f) := c_{-k-1} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_P(U) \quad .$$

  Das ist offensichtlich ein Garbenepimorphismus und

  $$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_P \to 0$$

  ist eine exakte Sequenz von Garben.

  Aus der exakten Kohomologiesequenz aus Satz 5.2.8 zu dieser kurzen exakten Sequenz von Garben und aus der Kohomologie der Wolkenkratzergarbe in 5.3.9 folgt dann sofort die exakte Sequenz von Kohomologiegruppen:

  $$\begin{aligned} 0 \ &\to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \mathbb{C} \\ &\to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Korollar 5.3.11.
Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche und sind $D \leq D'$ zwei Divisoren auf X, so hat man einen Epimorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0 \; .$$

Beweis.
Gilt $D' = D + P$ mit einem Divisor P, der durch einen einzigen Punkt gegeben ist, so folgt dies aus Betrachtung 5.3.10. Im Allgemeinen gilt $D' = D + P_1 + \ldots + P_m$ mit $P_j \in X$, und die Behauptung folgt mit Induktion. □

Theorem 5.3.12 (Satz von Riemann-Roch)**.**
Für jeden Divisor D auf einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g sind $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich-dimensionale komplexe Vektorräume und es gilt

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D \; .$$

Beweis.

- Das Resultat gilt für den Nulldivisor $D = 0$ mit $\deg D = 0$. Denn $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X)$ besteht nur aus den konstanten Funktionen, also $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. Nach Definition ist $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$.

- Sei D ist ein Divisor und $P \in X$; wir setzen $D' := D + P$. Wir nehmen an, dass der Satz von Riemann-Roch für einen der beiden Divisoren D oder D' gilt. Wir zerlegen die lange exakte Sequenz (3) in zwei kurze exakte Sequenzen:

$$\begin{array}{ll} 0 & \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to V \to 0 \\ 0 & \to W \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0 \; . \end{array}$$

  mit
$$V := \mathrm{Im}\,(H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad W := \mathbb{C}/V \; .$$

  Dann gilt
$$\dim V + \dim W = 1 = \deg D' - \deg D \; .$$

  Wir erhalten für die Dimensionen aus den beiden kurzen exakten Sequenzen die Gleichungen:
$$\begin{array}{rcl} \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) & = & \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V \\ \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) & = & \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W \; . \end{array}$$

  Addiert man diese Gleichungen, so findet man nach einfacher Umordnung

$$\begin{array}{rl} & \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg D' \\ = & \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D \; . \end{array}$$

  Damit impliziert der Satz von Riemann-Roch für D den Satz von Riemann-Roch für D' und umgekehrt.

- Einen beliebigen Divisor D auf X schreiben wir in der Form

$$D = P_1 + \ldots + P_m - P_{m+1} - \ldots - P_n \ ,$$

wobei Punkte P_i entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach auftreten dürfen. Ausgehend vom Nulldivisor zeigt man mit Hilfe des Resultats des vorangegangenen Schritts induktiv, dass der Satz von Riemann-Roch für den Divisor D gilt.

□

Definition 5.3.13
Man nennt die natürliche Zahl

$$i(D) := \ \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

den Spezialitätenindex des Divisors D.

Bemerkungen 5.3.14.

1. *Mit Hilfe des Spezialitätenindex kann man den Satz von Riemann-Roch trivialerweise in der Form*
$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = \ 1 - g + \deg D + i(D)$$
umschreiben. Da $i(D) \geq 0$ gilt, liefert dies eine Abschätzung von $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D)$ nach unten, garantiert also die Existenz globaler holomorpher Schnitte der Garbe $\mathcal{O}_D$, wenn der Grad $\deg D$ groß genug ist.

2. *Es gilt $i(D) = 0$, falls $\deg D > 2g - 2$. Ist der Grad des Divisors also hinreichend groß, so hat man sogar explizite Ausdrücke für die Dimension des Raums globaler Schnitte.*

3. *Ist $\deg D < 0$, so folgt aus Satz 5.3.7, dass $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$ und somit*
$$i(D) = g - 1 - \deg D \ .$$

Korollar 5.3.15.
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $a \in X$ ein Punkt. Dann gibt es eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf X, die in a einen Pol der Ordnung $\leq g+1$ hat und sonst holomorph ist.

Beweis.
Sei $D : X \to \mathbb{Z}$ der Divisor mit $D(a) = g+1$ und $D(x) = 0$ für alle $x \neq a$. Es ist $\deg(D) = g+1$. Nach dem Satz von Riemann-Roch ist

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg D \ = 2 \ .$$

Es gibt also eine nicht-konstante meromorphe Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$. Diese Funktion f erfüllt $(f) \geq -D$ und somit die gestellten Bedingungen. □

Korollar 5.3.16.
Zu jeder kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g gibt es eine holomorphe Überlagerungsabbildung $f : \ X \to \mathbb{P}_1$ mit höchstens $g+1$ Blättern.

Beweis.
Die in Korollar 5.3.15 konstruierte meromorphe Funktion nimmt den Wert ∞ mit einer Vielfachheit an, die kleiner als $g+1$ ist. Sie stellt daher eine solche Überlagerungsabbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$ dar. □

Korollar 5.3.17.
Jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht null ist isomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$.

Beweis.
Nach Korollar 5.3.16 kann eine solche Riemannsche Fläche X als einblättrige Überlagerung von $\mathbb{P}_1$ geschrieben werden. Einblättrige Überlagerungen sind aber nach Korollar 4.2.6 biholomorph. □

Korollar 5.3.15 läuft daher im Falle von Geschlecht $g=0$ darauf hinaus, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-a}$ einen Pol der Ordnung 1 in a hat und sonst holomorph ist. Elliptische Kurven sind gerade die Riemannschen Flächen vom Geschlecht eins, vgl. Korollar 5.4.7 unten. In der Tat hatten wir mit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion eine Funktion auf einer elliptischen Kurve konstruiert, die überall holomorph bis auf einen einzigen Pol der Ordnung zwei ist.

5.4 Der Serresche Dualitätssatz und die Riemann-Hurwitz Formel

Wir wollen nun die Kohomologiegruppen $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ mit Hilfe von meromorphen Differentialformen vom Grad 1 interpretieren.

Betrachtung 5.4.1.
Die exakte Sequenz aus Beispiel 5.2.6.4

$$0 \to \Omega \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

induziert nach Satz 5.2.9 einen Isomorphismus

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^2(X)/\mathrm{d}\mathcal{E}^{1,0}(X) \ .$$

Sei $\xi \in H^1(X,\Omega)$ und $\omega \in \mathcal{E}^2(X)$ ein Repräsentant von ξ vermöge dieses Isomorphismus. Wir setzen

$$\mathrm{res}(\xi) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_X \omega \ ;$$

wegen der Folgerung aus dem Statz von Stokes in Bemerkung 4.6.14 ist $\int_X \mathrm{d}\eta = 0$ für alle $\eta \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$, also ist die Linearform

$$\mathrm{res} : H^1(X, \Omega) \ \to \mathbb{C}$$

wohldefiniert.

Betrachtung 5.4.2.

1. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Für einen Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ bezeichne Ω_D die Garbe der meromorphen Differentialformen, die Vielfache von $-D$ sind. Für eine offene Menge $U \subset X$ besteht also $\Omega_D(U)$ aus allen meromorphen Differentialformen $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$ mit $\mathrm{ord}_x(\omega) \geq -D(x)$ für alle $x \in X$.*

2. *Insbesondere ist für den Nulldivisor $\Omega_0 = \Omega$ die Garbe der holomorphen Einsformen.*

3. *Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ eine nichtverschwindende meromorphe Differentialform mit Divisor K. Für einen beliebigen Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ induziert dann die Multiplikation mit (Einschränkungen von) ω einen Garbenisomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{D+K} & \xrightarrow{\sim} & \Omega_D \\ f & \mapsto & f\omega \end{array}$$

4. *Wir überlegen uns nun, dass es eine Konstante $k_0 \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass*

$$\dim H^0(X, \Omega_D) \; \geq \deg D + k_0$$

für alle $D \in \mathrm{Div}(X)$ gilt. Denn sei g das Geschlecht von X. Dann gilt nach dem Satz 5.3.12 von Riemann-Roch:

$$\begin{array}{rcl} \dim H^0(X, \Omega_D) & = & \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) \\ & = & \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + 1 - g + \deg(D+K) \geq \deg K + k_0 \end{array}$$

mit $k_0 := 1 - g + \deg(K)$.

Betrachtung 5.4.3.
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Divisor. Das Produkt

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D & \to & \Omega \\ (\omega, f) & \mapsto & \omega f \end{array}$$

induziert eine Abbildung

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \; \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \; \to H^1(X, \Omega) \; ,$$

die bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ auf Kozykeln durch

$$(\omega, (f_{ij})_{i,j \in I}) \mapsto (\omega f_{ij})_{i,j \in I}$$

definiert ist. Durch Verkettung mit dem Residuum $H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$ aus Betrachtung 5.4.1 erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : & H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) & \to & \mathbb{C} \\ & (\omega, \zeta) & \mapsto & \mathrm{res}(\omega\zeta) \end{array}$$

Diese Abbildung induziert natürlich eine lineare Abbildung in den Dualraum

$$\iota_D : \; H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \quad .$$

Theorem 5.4.4 (Dualitätssatz von Serre).
Für jeden Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X ist die Abbildung ι_D ein Isomorphismus.

Für den Beweis verweisen wir wieder auf das Buch von Forster.

Bemerkungen 5.4.5.

1. *Aus dem Serreschen Dualitätssatz folgt die Dimensionsgleichung*
$$\dim H^1(X,\mathcal{O}_D) = \dim H^0(X;\Omega_{-D}) \ ,$$
die im Spezialfall $D=0$ ergibt
$$g \equiv \dim H^1(X,\mathcal{O}) = \dim H^0(X;\Omega) \ .$$
Das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche X ist also gleich der Maximalzahl linear unabhängiger holomorpher Einsformen auf X.

2. *Den Satz von Riemann-Roch 5.3.12 kann man dann folgendermaßen formulieren:*
$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_{-D}) - \dim H^0(X,\Omega_D) = 1-g-\deg D \ .$$
Auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g ist also die Maximalzahl der linear unabhängigen meromorphen Funktionen, die Vielfache eines Divisors D sind, minus der Maximalzahl der linear unabhängigen meromorphen Differentialformen, die Vielfache von $-D$ sind, gleich $1-g-\deg D$.

3. *Es gilt für jeden Divisor D auf einer kompakten Riemannschen Fläche X auch die Isomorphie*
$$H^0(X,\mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X,\Omega_D)^* \ .$$
Denn sei $\omega_0 \neq 0$ eine meromorphe Differentialform auf X und K ihr Divisor. Nach Bemerkung 5.4.2.3 gilt $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$ und $\mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-D-K}$. Die Behauptung folgt daher aus dem Serreschen Dualitätssatz:
$$H^0(X,\mathcal{O}_{-D}) \cong H^0(X,\Omega_{-D-K}) \overset{\text{Serre}}{\cong} H^1(X,\mathcal{O}_{D+K})^* \cong H^1(X,\Omega_D)^* \ .$$

4. *Insbesondere für $D=0$ erhält man*
$$\dim H^1(X,\Omega) = \dim H^0(X,\mathcal{O}) = 1 \ .$$
Da die Abbildung aus Betrachtung 5.4.1
$$\mathrm{res} : H^1(X,\Omega) \to \mathbb{C}$$
nicht identisch verschwindet, ist sie ein Isomorphismus.

Satz 5.4.6.
Für den Divisor einer nicht-verschwindenden meromorphen Differentialform ω auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g gilt
$$\deg(\omega) = 2g-2 \ .$$

Beweis.
Sei $K=(\omega)$. Nach Riemann-Roch gilt
$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_K) - \dim H^1(X,\mathcal{O}_K) = 1-g+\deg K \ .$$
Nach Bemerkung 5.4.2.3 haben wir einen Isomorphismus von Garben $\Omega \cong \mathcal{O}_K$, also gilt
$$1-g+\deg K = \dim H^0(X,\Omega) - \dim H^1(X,\Omega) = g-1$$
mit Bemerkung 5.4.5.1 und 5.4.5.4. Es folgt $\deg K = 2(g-1)$. □

Wir können nun endlich auch das Geschlecht elliptischer Kurven berechnen:

Korollar 5.4.7.
Für jedes Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *hat der Torus* $\mathbb{C}/\Gamma$ *das Geschlecht eins.*

Beweis.
Die holomorphe Differentialform $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ induziert eine meromorphe Differentialform ω auf $\mathbb{C}/\Gamma$, die keine Nullstellen und Pole hat. Daher ist $\deg(\omega) = 2g - 2 = 0$, also das Geschlecht nach Satz 5.4.6 gleich $g = 1$. □

Wir ziehen nun Schlüsse für Überlagerungen:

Betrachtung 5.4.8.
Seien X, Y *kompakte Riemannsche Flächen und* $f : X \to Y$ *eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Für* $x \in X$ *sei* $v(f, x)$ *die Vielfachheit, mit der* f *in* x *den Wert* $f(x)$ *annimmt. Die Zahl*

$$b(f, x) := v(f, x) - 1$$

heißt die <u>*Verzweigungsordnung*</u> *der holomorphen Abbildung* f *im Punkt* x*. Es ist* $b(f, x) = 0$ *genau dann, wenn* f *in* x *unverzweigt ist.*

Da X *kompakt ist, gibt es nur endlich viele Punkte* $x \in X$ *mit nicht-verschwindender Verzweigungsordnung,* $b(f, x) \neq 0$*. Also ist die* <u>*Gesamtverzweigungsordnung*</u>

$$b(f) := \sum_{x \in X} b(f, x)$$

wohldefiniert.

Theorem 5.4.9 (Riemann-Hurwitz)**.**
Sei $f : X \to Y$ *eine* n*-blättrige holomorphe Überlagerungsabbildung zwischen den kompakten Riemannschen Flächen* X, Y *mit der Gesamtverzweigungsordnung* $b = b(f)$*. Sei* g *das Geschlecht von* X *und* g' *das Geschlecht von* Y*. Dann die gilt Riemann-Hurwitzsche Formel*

$$g = \frac{b}{2} + n(g' - 1) + 1 \ .$$

Beweis.

- Eine nicht-verschwindende meromorphe Differentialform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ hat nach Satz 5.4.6 den Grad $\deg(\omega) = 2g' - 2$. Ihr Pullback auf X hat, ebenfalls nach Satz 5.4.6, Grad $\deg(f^*\omega) = 2g - 2$.

- Wir berechnen nun die Ordnung des Pullbacks $f^*\omega$ durch eine lokale Betrachtung: sei $x \in X$ und $y := f(x)$. Nach Satz 4.2.2 gibt es eine Koordinatenumgebung (U, z) von x und eine Koordinatenumgebung (U', w) von y mit $z(x) = 0$ und $w(y) = 0$, so dass f sich in diesen Koordinaten als $w = z^k$ schreiben lässt, mit $k = v(f, x)$ der Vielfachheit, mit der f den Wert y in x annimmt.

  Schreibe auf U' die meromorphe Differentialform vom Grad Eins als $\omega = \psi(w)\mathrm{d}w$ mit einer meromorphen Funktion ψ. Dann gilt auf U:

$$f^*\omega = \psi(z^k)\mathrm{d}z^k = kz^{k-1}\psi(z^k)\mathrm{d}z$$

woraus folgt

$$\mathrm{ord}_x(f^*\omega) = \mathrm{ord}_x(z^{k-1}) + \mathrm{ord}_x\psi(z^k) = b(f,x) + v(f,x)\mathrm{ord}_y(\omega)\ .$$

Bei einer n-blättrigen Überlagerung ist die Summe der Vielfachheiten gleich n. Daraus folgt für jedes $y \in Y$

$$\sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} b(f,x) + n\cdot \mathrm{ord}_y(\omega)\ .$$

Somit folgt für den Grad der Einsformen:

$$\begin{aligned}
\deg f^*\omega &= \textstyle\sum_{x\in X} \mathrm{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y\in Y}\sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{ord}_x(f^*\omega)\\
&= \textstyle\sum_{x\in X} b(f,x) + n\sum_{y\in Y}\mathrm{ord}_y(\omega)\\
&= b(f)\ + n\deg(\omega)
\end{aligned}$$

Daraus folgt $2g-2 = b + n(2g'-2)$ und daraus die Behauptung.

□

Betrachtung 5.4.10.

- *Wir studieren als Anwendung den Fall einer n-blättrigen Überlagerung $\pi : X \to \mathbb{P}_1$ der Riemannschen Zahlenkugel mit Gesamtverzweigungsordnung b. Das Geschlecht ist dann nach dem Satz von Riemann-Hurwitz 5.4.9 wegen $g' = 0$ gleich*

$$g = \frac{b}{2} - n + 1\ .$$

- *Für zweiblättrige Überlagerungen, $n = 2$, ist b gleich der Zahl der Windungspunkte und $g = \frac{b}{2} - 1$. Kompakte Riemannsche Flächen, die sich als* zwei*blättrige Überlagerungen von $\mathbb{P}_1$ darstellen lassen und für die $g > 1$ ist heißen hyperelliptisch.*

- *Sei zum Beispiel*

$$P(z) \ = \ (z-a_1)(z-a_2)\cdot\dots\cdot(z-a_k)$$

ein Polynom k-ten Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen. Sei $A := \{a_1,\dots a_k,\infty\} \subset \mathbb{P}_1$. Sei $x \in \mathbb{P}_1\setminus A$; betrachte die Funktionskeime $\varphi \in \mathcal{O}_x$ mit $\varphi^2 = \rho_x(P)$. Dies sind zwei Funktionskeime in $\mathcal{O}_x$. Diese Funktionskeime für alle $x \in \mathbb{P}_1\setminus A$ bestimmen eine Zusammenhangskomponente X' der Überlagerung $|\mathcal{O}| \to \mathbb{P}_1 \setminus A$.

Man kann diese Überlagerung zu einer verzweigten Überlagerung $\pi : X \to \mathbb{P}_1$ fortsetzen, die man die Riemannsche Fläche von $\sqrt{P(z)}$ nennt. Die Punkte $a_1,\dots a_k$ sind dann Verzweigungspunkte. Da b gerade sein muss, finden wir, dass X genau dann über ∞ verzweigt ist, wenn k ungerade ist.

- *Das Geschlecht von X ist somit nach Riemann-Hurwitz $g = [(k-1)/2]$ mit $[x]$ der größten ganzen Zahl $\le x$. Nun können wir $\pi : X \to \mathbb{P}_1$ auch als eine meromorphe Funktion auffassen, die wir mit z bezeichnen. Dann ist für $j = 1,\dots [(k-1)/2]$ die Einsform*

$$\omega_j := \frac{z^{j-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}$$

auf X' holomorph. Eine explizite Rechnung in lokalen Koordinaten zeigt, dass diese Einsformen sich holomorph auf ganz X fortsetzen lassen. Man kann zeigen, dass sie linear unabhängig sind und daher eine Basis von $\Omega(X)$ bilden.

Satz 5.4.11.
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und D ein Divisor auf X. Dann gilt

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0\,, \text{ falls } \deg D > 2g-2\ .$$

Beweis.
Sei ω eine nicht-verschwindende meromorphe Differentialform auf X mit Divisor K. Dann gilt nach Betrachtung 5.4.2.3 die Isomorphie $\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$ von Garben, also

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \overset{\text{Serre}}{\cong} H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})\ .$$

Aus der Annahme $\deg D > 2g-2$ folgt mit $\deg K = 2g-2$ aus Satz 5.4.6

$$\deg(K-D) = \deg K - \deg D = 2g - 2 - \deg D < 0\ .$$

Nach Satz 5.3.7 ist aber dann $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$. □

Korollar 5.4.12.
Für die Garbe $\mathcal{M}$ der meromorphen Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche X gilt $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.

Beweis.
Sei $\xi \in H^1(X, \mathcal{M})$ eine Kohomologieklasse, die durch einen Kozyklus $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ repräsentiert werde. Indem man die Überdeckung $\mathcal{U}$ gegebenenfalls noch verfeinert, kann man annehmen, dass alle f_{ij} zusammen nur endlich viele Polstellen haben. Es gibt also einen Divisor D mit Grad $\deg D > 2g-2$, so dass $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ gilt. Nach Satz 5.4.11 zerfällt aber der Kozyklus (f_{ij}) bezüglich der Garbe $\mathcal{O}_D$, also erst recht bezüglich der Garbe $\mathcal{M}$. □

Da die Garbe $\mathcal{M}^{(1)}$ der meromorphen Differentialformen isomorph zur Garbe $\mathcal{M}$ ist – jede meromorphe Differentialform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ vermittelt durch $f \mapsto f\omega$ eine Isomorphie – gilt auch $H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0$.

5.5 Das abelsche Theorem für kompakte Riemannsche Flächen

Wir wollen auf einer kompakten Riemannschen Fläche meromorphe Funktionen mit vorgegebener Null- und Polstellenordnung konstruieren. Nach Korollar 4.6.16 muss dafür die Gesamtordnung der Nullstellen gleich der Gesamtordnung der Polstellen sein. Für $g \geq 1$ ist diese Bedingung aber nur noch notwendig, aber nicht mehr hinreichend, wie wir schon in Theorem 2.5.3 für elliptische Funktionen gesehen haben.

Definition 5.5.1
Sei X eine Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X. Eine Lösung von D ist eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $(f) = D$.

Bemerkungen 5.5.2.

1. *Eine Lösung hat also genau die durch den Divisor vorgeschriebenen Null- und Polstellenordnungen.*

2. *Ist X kompakt, so kann ein Divisor D nach Korollar 4.6.16 nur dann eine Lösung besitzen, wenn* $\deg D = 0$ *gilt.*

Definition 5.5.3
Sei D ein Divisor und

$$X_D := \{x \in X \ : D(x) \ \geq 0\} \ .$$

Eine schwache Lösung *von D ist eine* glatte *Funktion $f \in \mathcal{E}(X_D)$ mit der Eigenschaft: zu jedem Punkt $a \in X$ gibt es eine Koordinatenumgebung (U, z) mit $z(a) = 0$ und eine glatte Funktion $\psi \in \mathcal{E}(U)$ mit $\psi(a) \neq 0$, so dass*

$$f = \psi z^k \quad \text{in } U \cap X_D \quad \text{mit } k = D(a) \ .$$

Bemerkungen 5.5.4.

1. *Eine schwache Lösung f ist genau dann eine Lösung, d.h. eine meromorphe Lösung, wenn f auf X_D holomorph ist.*

2. *Zwei schwache Lösungen unterscheiden sich um eine glatte Funktion $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, die nirgendwo verschwindet.*

3. *Sind f_1 und f_2 schwache Lösungen der Divisoren D_1 bzw. D_2, so ist $f := f_1 \cdot f_2$ eine schwache Lösung des Divisors $D := D_1 + D_2$.*

   Dabei setzt man $f_1 \cdot f_2$ stetig fort in die Punkte $a \in X$ mit

   $$D(a) \geq 0, \ \text{aber } D_1(a) < 0 \ \text{ oder } \ D_2(a) \ < 0 \ .$$

4. *Ebenso ist f_1/f_2 schwache Lösung des Divisors $D_1 - D_2$.*

Für die Rechnung in lokalen Koordinaten verweisen wir auf das Buch von Forster.

Definition 5.5.5

1. *Eine* 1-Kette *auf einer Riemannschen Fläche X ist eine formale endliche ganzzahlige Linearkombination*

   $$c = \sum_{j=1}^{n} n_j c_j \qquad \text{mit } n_j \in \mathbb{Z}$$

   von glatten Kurven $c_j : [0, 1] \to X$.

2. *Für eine geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$ erklärt man das Integral über eine 1-Kette c durch $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung:*

   $$\int_c \omega := \sum_{j=1}^{n} n_j \int_{c_j} \omega \ .$$

3. *Die Menge aller 1-Ketten bildet eine abelsche Gruppe $C_1(X)$. Der* Randoperator

   $$\partial : \ C_1(X) \ \to \mathrm{Div}(X)$$

   ist auf Kurven folgendermaßen definiert: für eine Kurve $c : [0, 1] \to X$ setzen wir $\partial c = 0$, falls $c(0) = c(1)$. Andernfalls ist ∂c der Divisor mit Wert $+1$ im Endpunkt $c(1)$ und Wert -1 im Anfangspunkt $c(0)$. Dies setzen wir auf Ketten linear fort.

Bemerkungen 5.5.6.

1. *Offenbar gilt*
$$\deg(\partial c) = 0 \quad \textit{für alle } c \in C_1(X) \ .$$

2. *Umgekehrt finden wir auf einer kompakten Riemannschen Fläche für jeden Divisor D mit* $\deg D = 0$ *eine 1-Kette c mit $\partial c = D$.*

   Denn der Divisor lässt sich als Summe $D = D_1 + \ldots D_k$ von Divisoren schreiben, wobei jedes D_j nur in einem Punkt b_j den Wert $+1$ und in einem Punkt a_j den Wert -1 annimmt und sonst null ist. Sei c_j eine Kurve von a_j nach b_j und $c := c_1 + \ldots c_k$. Dann ist $\partial c = D$.

***Definition* 5.5.7**

1. *Der Kern der Abbildung ∂,*
$$Z_1(X) := \ \ker(C_1(X) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Div}(X))$$
   heißt die Gruppe der 1-Zyklen auf X. Insbesondere ist jede geschlossene Kurve ein 1-Zyklus.

2. *Zwei 1-Zykeln $c, c' \in Z_1(X)$ heißen homolog, wenn für jede* geschlossene *glatte Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ gilt*
$$\int_c \omega = \int_{c'} \omega \ .$$
   Die Menge aller Homologieklasen von 1-Zykeln bildet eine additive Gruppe $H_1(X)$, die erste Homologiegruppe von X. Für jedes $\gamma \in H_1(X)$ und eine geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ ist das Integral $\int_\gamma \omega$ wohldefiniert.

Aus dem Satz von Stokes folgt, dass homotope Kurven stets homolog sind. Daher gibt es einen Gruppenhomomorphismus von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ auf die erste Homologiegruppe $H_1(X)$,
$$\pi_1(X) \ \to H_1(X) \ ,$$
der sogar surjektiv ist. Da aber die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ im Allgemeinen nicht abelsch ist, ist dies kein Isomorphismus.

Man kann nun zeigen:

Theorem 5.5.8 (Abelsches Theorem)**.**
Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit $\deg D = 0$. *Dann ist D genau dann lösbar, d.h. es gibt eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $(f) = D$ wenn es eine 1-Kette $c \in C_1(X)$ gibt mit $\partial c = D$ und*
$$\int_c \omega = 0 \quad \textit{für alle} \quad \omega \in \Omega(X) \ .$$

Wiederum verweisen wir für den Beweis auf das Buch von Forster.

Bemerkung 5.5.9.

1. *Die Bedingung $\int_c \omega = 0$ braucht natürlich nur auf einer Basis von $\Omega(X)$ nachgeprüft werden.*

2. *Ist $\gamma \in C_1(X)$ eine beliebige 1-Kette mit $\partial\gamma = D$, so kann man die Bedingung auch so formulieren: es gibt einen 1-Zyklus $\alpha \in Z_1(X)$, nämlich $\alpha = \gamma - c$, so dass*
$$\int_\gamma \omega_j = \int_\alpha \omega_j$$
für eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_g$ von $\Omega(X)$ gilt.

Wir erkennen diesen Satz als Verallgemeinerung des abelschen Theorems 2.5.3 für elliptische Funktionen:

Korollar 5.5.10.
Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und
$$\mathcal{F} := \ \{t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 \mid 0 \leq t_1 < 1 \quad und \quad 0 \leq t_2 < 1\}$$
eine Grundmasche des von γ_1, γ_2 aufgespannten Gitters Γ in $\mathbb{C}$. Es seien Nullstellen $a_1, \ldots a_n$ und Polstellen $b_1, \ldots b_n$ in $\mathcal{F}$ vorgegeben; im Falle von Vielfachheiten können Punkte mehrfach auftreten.

Dann gibt es eine bezüglich Γ doppeltperiodische meromorphe Funktion mit diesen Null- und Polstellen in $\mathcal{F}$ genau dann, wenn
$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \ \in \Gamma \ .$$

Beweis.
Sei D der durch die Null- und Polstellen vorgegebene Divisor auf $\mathbb{C}/\Gamma$. In $\mathbb{C}$ wähle man Kurven c_k von b_k nach a_k, etwa gerade Linien. Sei $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion und
$$c := \pi \circ c_1 + \ldots + \pi \circ c_n \in C_1(\mathbb{C}/\Gamma) \ .$$
Dann ist $\partial c = D$. Sei $\omega \in \Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$ die von der Differentialform $\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C}$ induzierte Differentialform auf $\mathbb{C}/\Gamma$. Sie bildet eine Basis des eindimensionalen komplexen Vektorraums $\Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$. Dann gilt
$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^n \int_{c_k} \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \ .$$
Die Behauptung folgt nun aus dem abelschen Theorem 5.5.8. □

5.6 Das Jacobische Umkehrproblem

Wir untersuchen nun noch die Struktur der Restklassengruppe der Divisoren vom Grad Null modulo der Hauptdivisoren, also der Divisoren der Form $D = (f)$ für eine meromorphe Funktion f, vgl. Definition 5.3.3.

Definition 5.6.1
Sei V ein N-dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Untergruppe $\Gamma \subset V$ bezüglich der Addition heißt Gitter, wenn es N über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ gibt, so dass
$$\Gamma = \ \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_N \qquad \textit{gilt.}$$

Das folgende Lemma kam in den Übungen:

Lemma 5.6.2.
Eine Untergruppe $\Gamma \subset V$ eines reellen Vektorraums V ist genau dann ein Gitter, wenn gilt

1. *Γ ist diskret, d.h. es gibt eine Umgebung U der Null in V, so dass $\Gamma \cap U = \{0\}$ gilt.*
2. *Γ ist in keinem echten Untervektorraum von V enthalten.*

Definition 5.6.3
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und sei $\omega_1, \ldots, \omega_g$ eine Basis des Vektorraums $\Omega(X)$ der holomorphen Differentialformen auf X. Die Untergruppe

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) \subset \mathbb{C}^g$$

bestehe aus allen Vektoren

$$(\int_\alpha \omega_1, \int_\alpha \omega_2, \ldots, \int_\alpha \omega_g) \in \mathbb{C}^g \ ,$$

wobei α die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ durchläuft.

Man kann zeigen, dass dies ein Gitter in $\mathbb{C}^g$ ist,das Periodengitter, wobei $\mathbb{C}^g$ als $2g$-dimensionaler reeller Vektorraum aufgefasst wird.

Bemerkung 5.6.4.
Das Periodengitter $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ hat eine Basis, deren Elemente durch $2g$ geschlossene Kurven repräsentiert werden können. Es gibt also $2g$ geschlossene Kurven $\alpha_1, \ldots \alpha_{2g}$ auf X, so dass die $2g$ Vektoren

$$\gamma_\nu := (\int_{\alpha_\nu} \omega_1, \int_{\alpha_\nu} \omega_2, \ldots \int_{\alpha_\nu} \omega_g) \in \mathbb{C}^g \qquad mit \ \ \nu = 1, 2, \ldots 2g$$

reell linear unabhängig sind und

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots \mathbb{Z}_{\gamma_{2g}}$$

gilt.

Die Homologieklassen von $\alpha_1, \ldots \alpha_{2g}$ in $H_1(X)$ sind über $\mathbb{Z}$ linear unabhängig, denn eine Relation $\sum_{i=1}^{2g} n_i \alpha_i = 0$ mit gewissen $n_i \in \mathbb{Z}$ würde die gleiche Relation zwischen den Komponenten aller Vektoren γ_ν implizieren, so dass diese Vektoren alle in einem echten reellen Untervektorraum von $\Omega(X)$ lägen. Man zeigt, dass diese Homologieklassen auch $H_1(X)$ erzeugen. Es ist also $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Definition 5.6.5
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $\omega_1, \ldots \omega_g$ eine Basis von $\Omega(X)$. Dann heißt der Quotient

$$\mathrm{Jac}(X) := \mathbb{C}^g / \mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$$

die Jacobi-Mannigfaltigkeit von X. Sie ist topologisch ein $2g$-dimensionaler Torus.

Bemerkungen 5.6.6.

1. *Wir betrachten $\mathrm{Jac}(X)$ nur als abelsche Gruppe; man kann $\mathrm{Jac}(X)$ aber auch als kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension g ansehen.*

2. *Die Definition von* $\mathrm{Jac}(X)$ *hängt von der Wahl der Basis* $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ *ab. Bei anderer Wahl erhält man jedoch eine isomorphe Gruppe* $\mathrm{Jac}(X)$.

Definition 5.6.7
Sei X eine Riemannsche Fläche.

1. *Mit* $\mathrm{Div}_0(X) \subset \mathrm{Div}(X)$ *bezeichnen wir die Untergruppe der Divisoren vom Grad 0. Mit* $\mathrm{Div}_H(X) \subset \mathrm{Div}_0(X)$ *bezeichnen wir die Untergruppe der Hauptdivisoren.*

2. *Der Quotient*
$$\mathrm{Pic}(X) \ := \ \mathrm{Div}_0(X) \ / \mathrm{Div}_H(X)$$
heißt die Picardgruppe *der Riemannschen Fläche X.*

Betrachtung 5.6.8.
Wir definieren eine Abbildung
$$\Phi : \quad \mathrm{Div}_0(X) \ \to \mathrm{Jac}(X) \ .$$
Sei $D \in \mathrm{Div}_0(X)$ und $c \in C_1(X)$ eine Kette mit $\partial c = D$. Eine solche Kette existiert nach Bemerkung 5.5.6. Der Vektor
$$(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g) \ \in \mathbb{C}^g$$
ist durch den Divisor D modulo dem Periodengitter $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ *eindeutig bestimmt. Denn wählt man eine andere 1-Kokette c', so ist $\partial(c - c') = 0$, die Differenz der Integrale liegt also im Periodengitter* $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$*. Die Restklasse des Vektors sei $\Phi(D)$. Offenbar ist Φ ein Gruppenhomomorphismus.*

Das abelsche Theorem besagt nun, dass der Kern von Φ, also die Restklassen mit verschwindenden Periodenintegralen, gerade aus den Hauptdivisoren besteht. Wir bekommen also eine Injektion
$$j : \ \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Jac}(X) \quad .$$

Man kann dann zeigen:

Satz 5.6.9.
Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist die Abbildung
$$j : \ \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Jac}(X)$$
ein Isomorphismus. Die Divisoren vom Grad Null modulo der Hauptdivisoren werden also gerade durch den Quotienten nach dem Periodengitter beschrieben.

Betrachtung 5.6.10.

- *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und seien $a_1, \ldots a_g \in X$ beliebig vorgegebene Referenzpunkte. Wir bezeichnen mit D_x den Divisor auf X, der in $x \in X$ den Wert* 1 *annimmt und sonst Null ist. Damit definieren wir eine Abbildung*
$$\begin{array}{rcl} \psi : X^g & \to & \mathrm{Pic}(X) \\ (x_1, \ldots, x_g) & \mapsto & \sum_{j=1}^g (D_{x_j} - D_{a_j}) \bmod \mathrm{Div}_H(X) \ . \end{array}$$
Wir unterdrücken die Abhängigkeit der Abbildung ψ von der Wahl der Referenzpunkte $a_1, \ldots a_g$ in der Notation.

- *Nun sei*

$$J : X^g \xrightarrow{\psi} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{j} \mathrm{Jac}(X) \ .$$

Dann ist

$$J(x_1, \dots, x_g) = \left(\sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i \right)_{i=1,\dots g} \mod \mathrm{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g) \ .$$

Satz 5.6.11.

1. *Die Abbildung* $\Psi : X^g \to \mathrm{Pic}(X)$ *ist surjektiv.*
2. *Die Abbildung* $J : X^g \to \mathrm{Jac}(X)$ *ist surjektiv.*

Beweis.
Wegen Satz 5.6.9 ist j ein Isomorphismus. Daher reicht es aus, die Surjektivität von ψ zu zeigen. Wir wollen also zeigen, dass jeder Divisor $D \in \mathrm{Div}_0(X)$ vom Grad Null modulo einem Hauptdivisor zu einem Divisor der Gestalt $\sum_{j=1}^{g}(D_{x_j} - D_{a_j})$ mit $x_j \in X$ äquivalent ist.

Betrachte dazu den Divisor

$$D' := D + D_{a_1} + \ldots + D_{a_g}$$

mit $\deg D' = g$. Nach dem Satz von Riemann-Roch ist $\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \geq 1 - g + \deg D' = 1$. Es gibt daher eine meromorphe Funktion $f \neq 0$ auf X mit $(f) \geq -D'$, also gibt es einen Divisor

$$D'' := (f) + D' \geq 0 \ .$$

Da $\deg D'' = \deg D = g$ ist, gibt es Punkte $x_1, \dots x_g \in X$ mit

$$D'' = D_{x_1} + \ldots + D_{x_g} \ .$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{g}(D_{x_j} - D_{a_j}) = D + (f) \ .$$

□

Bemerkung 5.6.12.
Die Abbildung $J : X^g \to Jac(X)$ *ist invariant unter Vertauschung der Punkte. Wir erhalten daher eine Abbildung* $S^g(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ *aus dem* g*-fachen symmetrischen Produkt von* X*. Man kann* $S^g(X)$ *mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen. Die Abbildung* $S^g(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ *ist dann zwar nicht biholomorph, aber immer noch bimeromorph, d.h. sie induziert einen Isomorphismus der meromorphen Funktionenkörper von* $\mathrm{Jac}(X)$ *und* $S^g(X)$*.*

Wir hatten in Korollar 5.4.7 gesehen, dass jeder Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ Geschlecht eins hat. Wir zeigen nun die Umkehrung, dass jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht eins ein Torus ist.

Satz 5.6.13.
Für jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 ist die Abbildung $J : X \to \mathrm{Jac}(X)$ *ein Isomorphismus. Insbesondere ist* X *topologisch ein Torus.*

Beweis.
Wir beschreiben die Abbildung J wie in Betrachtung 5.6.10 und wählen dazu eine nichtverschwindende meromorphe Einsform $\omega \in \Omega(X) \setminus \{0\}$. Setze $\Gamma := \mathrm{Per}(\omega)$ und wähle $a \in X$. Dann ist für $x \in X$

$$J(x) = \int_a^x \omega \bmod \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma = \mathrm{Jac}(X) \ .$$

Man kann zeigen, dass diese Abbildung holomorph ist. Sie ist nach Satz 5.6.11 surjektiv. Dies folgt übrigens auch, da X kompakt ist und J holomorph ist, aus dem allgemeinen Satz 4.2.8.

Die Abbildung ist auch injektiv: denn sonst gäbe es nach dem abelschen Theorem auf X eine meromorphe Funktion f, die einen einzigen Pol der Ordnung eins hat. Daraus folgt aber schon, dass X isomorph zu $\mathbb{P}_1$ wäre. Denn f nähme nach Satz 4.3.24 auch jeden anderen Wert mit Vielfachheit 1 an und wäre so eine biholomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$.

□

Bemerkung 5.6.14.
Wir können nun noch einmal zum Abschluss elliptische Integrale betrachten.

Sei $P(z)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstellen und X die Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion $\sqrt{P(z)}$ über der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$. Dann hat X nach Betrachtung 5.4.10 Geschlecht 1 und die holomorphe Einsform

$$\omega = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}}$$

ist eine Basis von $\Omega(X)$. Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ das Periodengitter von ω. Die Abbildung $J : X \to \mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}/\Gamma$ wird dann gegeben durch das "elliptische Integral erster Gattung"

$$J(x) \ = \ \int_a^x \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{P(z)}} \bmod \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma \ .$$

Wir haben also nun als den korrekten Integrationsbereich elliptischer Integrale die elliptische Kurve X erkannt und als korrekten Wertebereich den Quotienten nach dem Periodengitter.

Betrachte die Umkehrabbildung $F : \mathbb{C}/\Gamma \to X$ von J und die kanonischen Projektionen

$$\pi : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma \quad \textit{und} \quad p : X \to \mathbb{P}_1 \ .$$

Dann ist

$$f := p \circ F \circ \pi : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$$

eine doppeltperiodische meromorphe Funktion, also eine elliptische Funktion, vgl. Theorem 2.4.4.

Index