Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. C. Schweigert,
Dr. T. Zorman
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra I
Wintersemester 25/26

Blatt 0

Zur Bearbeitung und Besprechung in den Übungen in der Woche vom 13.10.2025
Dieses Blatt wird nicht korrigiert und geht nicht in die Wertung ein.
Sie erhalten dieses Blatt und Blatt 1 über STiNE. Die weiteren Blätter werden Ihnen über moodle bereit gestellt.

Problem 0.1

Sei $\mathbb{R}^2$ die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen; wir schreiben $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Definiere das *Standard-Skalarprodukt* als Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto \langle a, b\rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

Beweisen Sie folgende Aussagen, oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel:

(a) Zu jedem Element $a \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein Element $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle a, b\rangle = 0$.

(b) Zu jedem Element $a \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau ein Element $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle a, b\rangle = 0$.

(c) Sei $a \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq 0$. Für $b, c \in \mathbb{R}^2$ beliebig folgt aus $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle$, dass $b = c$.

Problem 0.2

Wir setzen für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

und für zusätzlich $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$x + y := (x_1 + y_2, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ genau dann gilt, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt.

Problem 0.3

Wir betrachten zwei Abbildungen

$$A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}; \qquad B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Es sei $p = (1, \frac{3}{2})$ und $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $A(x) = p$. Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ mit $B(x) = p$, und beschreiben Sie jeweils die Geometrie der Gesamtheit dieser Vektoren.